MODELOWANIE INŻYNIERSKIE ISSN 1896-771X
39, s. 41-48, Gliwice 2010

WERYFIKACJA DOKŁADNOŚCI METODY PRZYBLIŻONEJ GALERKINA W MODELOWANIU I BADANIU DRGAJĄCYCH UKŁADÓW MECHATRONICZNYCH

ANDRZEJ BUCHACZ, MAREK PŁACZEK

Instytut Automatyzacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska
e-mail: andrzej.buchacz@polsl.pl, marek.placzek@polsl.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiono zagadnienia weryfikacji dokładności przybliżonej metody Galerkina i jej przydatności w modelowaniu i badaniu drgających układów mechatronicznych. Weryfikacja metody przybliżonej jest istotna ze względu na brak możliwości stosowania metody dokładnej w odniesieniu do układów mechatronicznych. Dokładność metody przybliżonej określono, zestawiając wyniki badania układu mechanicznego otrzymane tą metodą z wynikami metody dokładnej. W efekcie porównania obu metod wprowadzono współczynniki korekcyjne metody przybliżonej.

1. WSTĘP

Modelowanie i badanie środków technicznych, w których stosuje się materiały o właściwościach piezoelektrycznych, ze względu na coraz większą popularność tego typu układów, staje się problemem często napotykanym w praktyce inżynierskiej [10,12]. W pracy poruszono zagadnienia modelowania drgających układów mechatronicznych, w których zastosowano przetworniki piezoelektryczne w celu kontroli i stabilizacji drgań. Zadanie to jest procesem złożonym i pracochłonnym. Wyznaczenie charakterystyk dynamicznych tego typu układów wymaga stosowania złożonych modeli i zaawansowanego aparatu matematycznego, co często powoduje konieczność wprowadzania znacznych uproszczeń i pominięcia w obliczeniach elementów o pozornie niewielkim wpływie na uzyskiwane wyniki. Postępowanie takie często prowadzi do mało dokładnej analizy układów i otrzymania błędnych wyników przeprowadzanych badań. Przykładem takiego postępowania jest pomijanie wpływu warstwy pośredniczącej pomiędzy przetwornikiem piezoelektrycznym a układem mechanicznym, której właściwości w znacznym stopniu wpływają jednak na charakterystyki dynamiczne układu, a tym samym na skuteczność kontroli i stabilizacji drgań [1-5,8,9].

Podstawowym jednak zagadnieniem jest wybór właściwej metody analizy, którą można zastosować w odniesieniu do tego typu układów mechatronicznych, z gwarancją otrzymania dużej dokładności wyników. W przypadku drgających, jednowymiarowych układów mechatronicznych, których modelowania i badania podjęto się, nie jest możliwe zastosowanie metody dokładnej rozdzielenia zmiennych – metody Fouriera. Zastosowano więc metodę przybliżoną Galerkina, której dokładność zweryfikowano i wprowadzono współczynniki korekcyjne, dzięki czemu uzyskano dużą dokładność uzyskanych wyników badanych układów.

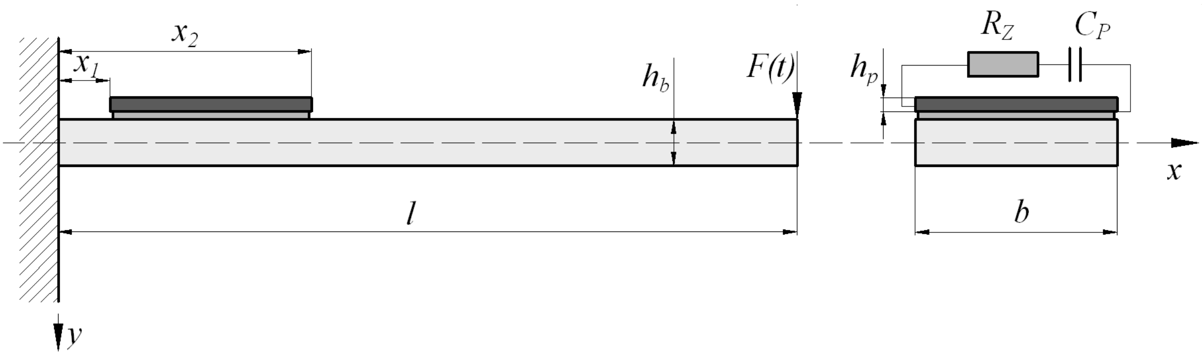
2. UKŁAD MECHANICZNY ORAZ MECHATRONICZNY

Układ mechatroniczny modelowany i badany w dalszej części pracy (przedstawiony na rys.1) jest rozwinięciem układu mechanicznego, w postaci belki wspornikowej pozbawionej przetwornika piezoelektrycznego wraz z zewnętrznym obwodem elektrycznym, przy założeniu, że oba układy są jednakowych wymiarów oraz że wykonano je z tego samego materiału. Dlatego też pierwszym krokiem było zamodelowanie oraz przeprowadzenie analizy drgań giętnych układu mechanicznego, do której wyników odniesiono wyniki analizy układu mechatronicznego. Analizę drgań układu mechanicznego przeprowadzono metodą dokładną, tak zwaną metodą Fouriera, a także metodą przybliżoną Galerkina. Celem takiego działania była weryfikacja dokładności wyników metody przybliżonej stosowanej w dalszej części pracy do analizy układu mechatronicznego i wprowadzenie ewentualnych współczynników korekcyjnych tej metody.

W przypadku obu układów założono, że są one obciążone na swobodnym końcu harmonicznie zmienną siłą działającą w kierunku prostopadłym do osi belki, opisaną zależnością (1):

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t). \tag{1}$$

Równanie drgań giętnych rozpatrywanych układów wyprowadzono, zakładając model matematyczny Bernoullego – Eulera belki, a więc biorąc pod uwagę jedynie przemieszczenia elementów belki w kierunku poprzecznym do osi belki i nie uwzględniając obrotów przekrojów belki wokół osi obojętnej zginania. Przyjęto również założenie, że materiał belki jest liniowo-sprężysty oraz hipotezę płaskich przekrojów. Przemieszczenia liniowe przekrojów belki w kierunku poprzecznym do osi geometrycznej określono współrzędną *y(x,t)*. Równanie drgań giętych belki ułożono wyznaczając, zgodną z zasadą d'Alemberta, równowagę sił działających na wycięty myślowo element belki o długości *dx* [1-5,7,8,9,13].



Rys.1. Badany układ mechatroniczny (układ mechaniczny nie zawiera przetwornika piezoelektrycznego z zewnętrznym obwodem elektrycznym)

3. METODA DOKŁADNA FOURIERA ORAZ PRZYBLIŻONA METODA GALERKINA

W celu weryfikacji dokładności metody przybliżonej wyznaczono podatność dynamiczną *Y*, opisaną zależnością (2), układu mechanicznego, stosując metodę dokładną, w której rozwiązania poszukuje się w postaci iloczynu dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją samej zmiennej *x*, zaś druga samej zmiennej *t* (3):

$$y(x,t) = Y \cdot F_0 \cos(\omega t), \tag{2}$$

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t). \tag{3}$$

Ze względu na charakter różniczkowego równania ruchu układu konieczne jest określenie sześciu warunków granicznych, z których cztery określone są ze względu na zmienną *x*, zaś dwa ze względu na zmienną *t*. Poprzez warunki brzegowe opisano odkształcenia w miejscu utwierdzenia beki - zerową wartość ugięcia oraz kąta obrotu belki oraz zerową wartość momentu gnącego i wartość siły poprzecznej na swobodnym końcu belki. Warunkami początkowymi opisano kształt belki określony funkcją $\varphi(x)$, oraz prędkości poszczególnych punktów belki wyrażone funkcją $\psi(x)$, w chwili początkowej $t=0$. Stosując ogólnie znane przekształcenia, otrzymano równanie charakterystyczne układu, którego pierwiastki zastosowano do wyznaczenia ciągu częstości drgań własnych badanego układu mechanicznego.

W kolejnym kroku do wyznaczenia podatności dynamicznej układu mechanicznego zastosowano przybliżoną metodę Galerkina, w której założono rozwiązanie różniczkowego równania drgań giętych belki w postaci sumy funkcji własnych układu, odpowiednio zmiennej czasu i przemieszczenia (4) spełniającej warunki brzegowe (5), opisujące odkształcenia drgającej belki w miejscu utwierdzenia oraz na jej swobodnym końcu [1-5]:

$$y(x,t) = A\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2l} \cdot x\right] \cdot \cos(\omega t), \qquad n = 1,2,3\ldots, \tag{4}$$

$$y(0,t) = 0, \qquad y(l,0) = A, \tag{5}$$

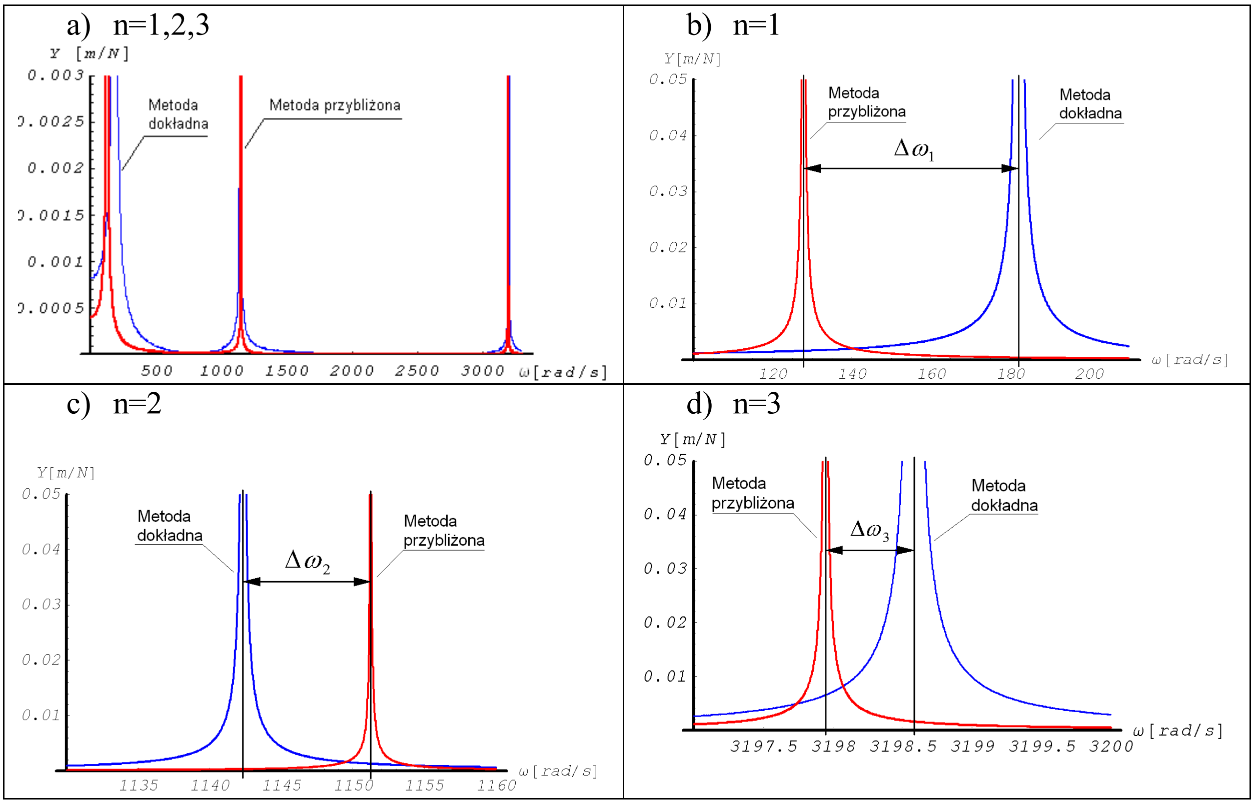
gdzie *A* oznacza amplitudę drgań belki.

4. PORÓWNANIE OTRZYMANYCH WYNIKÓW

Wyniki analizy układu mechanicznego, przeprowadzonej metodą dokładną oraz przybliżoną, przedstawiono na rys. 2 w postaci przebiegów podatności dynamicznej układu, wyznaczonej na swobodnym końcu belki (przy $x=l$). W tabeli 1 zestawiono wartości częstości drgań własnych układu mechanicznego wyznaczone metodą dokładną oraz przybliżoną. Zestawiono ponadto wartości współczynników korygujących, wprowadzonych w wyniku przeprowadzonego porównania do metody przybliżonej. Współczynniki korygujące $\Delta\omega_n$ wprowadzono w celu zniwelowania różnic wartości częstości drgań własnych układu wyznaczonych poszczególnymi metodami i zwiększenia tym samym dokładności metody przybliżonej. Wartości współczynników wyznaczono zgodnie z zależnością:

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_n', \tag{6}$$

gdzie jako ω_n' oznaczono wartość częstości drgań własnych układu wyznaczoną metodą przybliżoną Galerkina.



Rys.2. Podatność dynamiczna układu mechanicznego – metoda dokładna oraz metoda przybliżona Galerkina

Tab.1. Wartości częstości drgań własnych układu mechanicznego

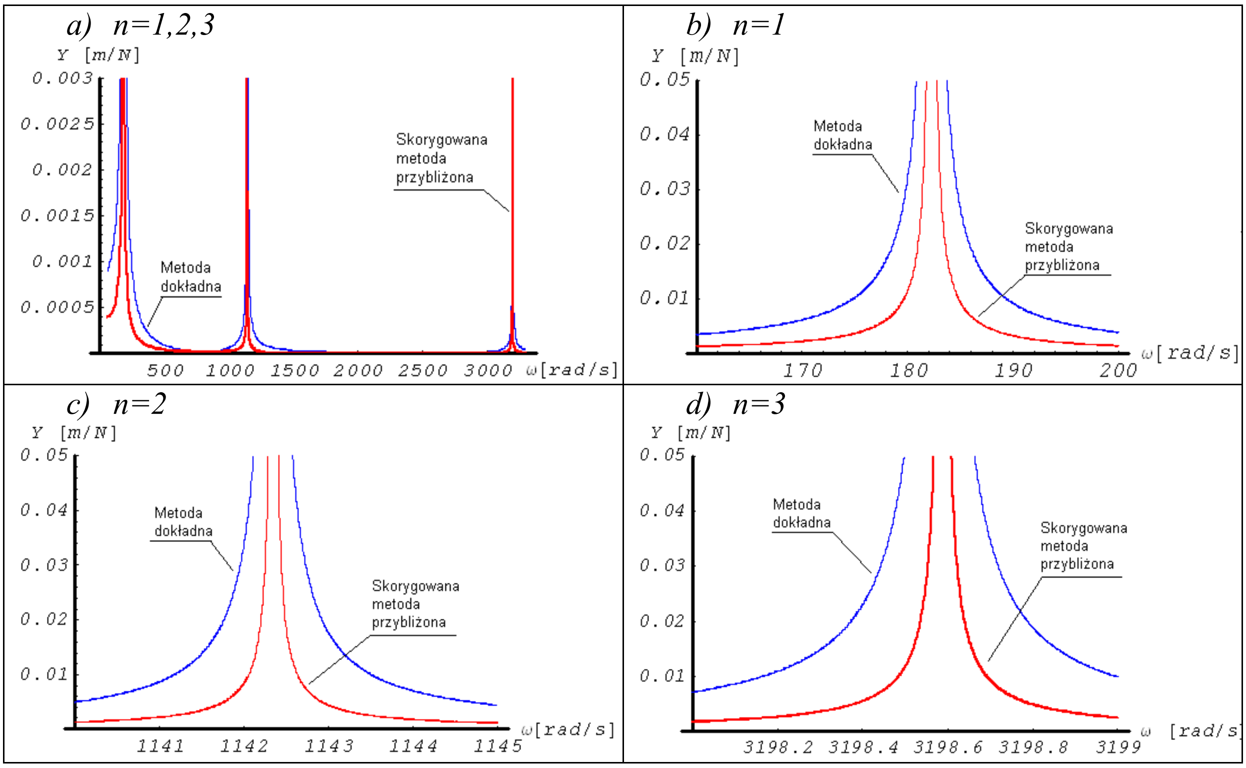
n	Metoda dokładna $\left[\frac{rad}{s}\right]$	Metoda przybliżona $\left[\frac{rad}{s}\right]$	$\Delta\omega_n \left[\frac{rad}{s}\right]$
1	$\omega_1 = 182{,}281$	$\omega_1 = 127{,}918$	$\Delta\omega_1 = 54{,}363$
2	$\omega_2 = 1142{,}34$	$\omega_2 = 1151{,}26$	$\Delta\omega_2 = -8{,}92$
3	$\omega_3 = 3198{,}59$	$\omega_3 = 3197{,}95$	$\Delta\omega_3 = 0{,}64$
4	$\omega_4 = 6267{,}98$	$\omega_4 = 6267{,}98$	$\Delta\omega_4 = 0$
5	$\omega_5 = 10361{,}4$	$\omega_5 = 10361{,}4$	$\Delta\omega_5 = 0$

Rozbieżności wyników uzyskanych za pomocą obu metod zmniejszają się przy wyższych częstościach drgań własnych układu, natomiast, począwszy od czwartej częstości, zanikają całkowicie. Wynika to z faktu, że przy $n>3$ wartości częstości drgań własnych układu opisane są jednakową zależnością w przypadku obu metod:

$$\omega = \sqrt{\frac{E_b J_b}{\rho_b A_b}} \cdot k^2, \qquad k = (2n-1)\frac{\pi}{2l}, \qquad n = 1,2,3\ldots \tag{7}$$

5. SKORYGOWANA METODA PRZYBLIŻONA

W wyniku przeprowadzonej analizy porównawczej otrzymanych wyników wprowadzono współczynniki korygujące przesunięcia wartości częstości drgań układu w przypadku metody przybliżonej, przez co wyeliminowano niedokładności metody. Korekcję wyników otrzymanych metodą przybliżoną przeprowadzono jedynie w przypadku trzech pierwszych częstości drgań własnych układu. Przy wyższych częstościach nie ma konieczności korygowania metody przybliżonej, gdyż nie ma różnic w wynikach otrzymanych poszczególnymi metodami. Przebiegi skorygowanej podatności dynamicznej wyznaczonej przybliżoną metodą Galerkina przedstawiono na rys. 3.



Rys.3. Podatność dynamiczna układu mechanicznego – metoda dokładna oraz skorygowana metoda przybliżona Galerkina

Uzyskane wyniki analizy układu mechanicznego przybliżoną metodą Galerkina w nieznacznym stopniu różnią się wartościami od wyników analizy układu metodą dokładną. Po wprowadzeniu współczynników korygujących wyeliminowano niedokładności metody przybliżonej związane z przesunięciem wartości trzech pierwszych częstości drgań własnych układu. Uzasadnione jest więc zastosowanie skorygowanej metody przybliżonej do analizy układów mechatronicznych.

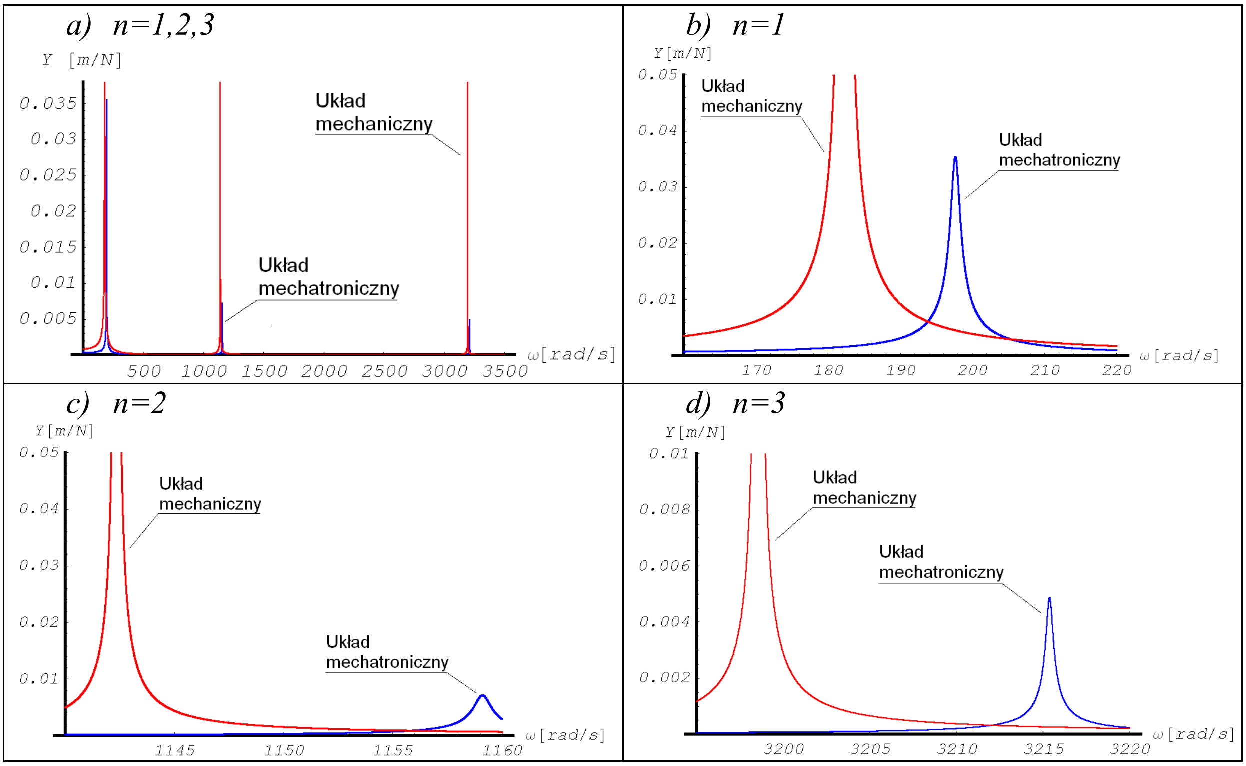
6. PODATNOŚĆ DYNAMICZNA UKŁADU MECHATRONICZNEGO

Skorygowaną metodę przybliżoną Galerkina zastosowano następnie do analizy układu mechatronicznego. Układ mechatroniczny utworzono, dołączając do powierzchni belki przetwornik piezoelektryczny wraz z zewnętrznym rezystorem bocznikowym o rezystancji R_Z. Drgająca belka wspornikowa oddziałuje na przetwornik piezoelektryczny, który w wyniku odkształcenia generuje ładunek elektryczny i produkuje dodatkową sztywność natury elektromechanicznej, zależną od pojemności elektrycznej przetwornika piezoelektrycznego.

Energia elektryczna zamieniana jest na ciepło oddawane do otoczenia na rezystorze. Przetwornik piezoelektryczny wraz z zewnętrznym rezystorem nazywa się tłumikiem bocznikowym szerokopasmowym (ang. shunt damper), który wprowadza do układu dodatkową sztywność natury elektrycznej [1-6].

Uwzględniając schemat zastępczy przetwornika piezoelektrycznego, w którym siłę elektromotoryczną generowaną przez przetwornik oraz jego pojemność elektryczną przedstawiono w postaci gałęzi szeregowej, badany układ mechatroniczny można przedstawić w postaci jak na rys. 1. Wyprowadzając pojemność elektryczną przetwornika poza jego schemat, przetwornik piezoelektryczny wraz z zewnętrznym obwodem bocznikowym można traktować jako szeregowy obwód elektryczny typu RC z harmonicznym źródłem napięcia, generowanym przez przetwornik. Obwód ten opisano równaniem wyprowadzonym zgodnie z metodą klasyczną analizy stanów nieustalonych liniowych obwodów elektrycznych [14]. W modelu matematycznym układu mechatronicznego założono jednorodny, jednoosiowy stan naprężenia przetwornika piezoelektrycznego oraz uwzględniono warstwę kleju łączącą przetwornik z belką, przy założeniu jej czystego ścinania. Wyprowadzone równanie ruchu belki oraz przetwornika piezoelektrycznego zapisano w postaci układu równań, otrzymując dyskretno – ciągły model matematyczny rozpatrywanego układu mechatronicznego.

Przebieg podatności dynamicznej układu mechatronicznego, wyznaczonej skorygowaną, przybliżoną metodą Galerkina, przedstawiono na wykresach. Podatność dynamiczną układu wyznaczono na swobodnym końcu belki ($x=l$) i zestawiono z podatnością układu mechanicznego, wyznaczoną metodą dokładną.



Rys.4. Podatność dynamiczna układu mechanicznego – metoda dokładna oraz układu mechatronicznego– skorygowana metoda przybliżona Galerkina

7. WNIOSKI

Przeprowadzając weryfikację dokładności metody przybliżonej w modelowaniu i badaniu drgających, jednowymiarowych układów mechatronicznych określono niedokładności metody. Wykazano rozbieżności wartości częstości drgań własnych układu mechanicznego, przeprowadzając jego analizę, zarówno metodą dokładną, jak i przybliżoną. Rozbieżności wartości częstości drgań własnych zaobserwowano jedynie w przypadku trzech pierwszych częstości drgań własnych układu. Różnice wartości podatności dynamicznej układu mechanicznego wyznaczonej poszczególnymi metodami nie są znaczące.

Wprowadzając do metody przybliżonej Galerkina współczynniki korekcyjne zniwelowano różnice wynikające z niedokładności metody, zapewniając tym samym jej dużą dokładność, umożliwiając jej zastosowanie w odniesieniu do badania układów mechatronicznych. Przesunięcie częstości drgań własnych układu mechatronicznego w odniesieniu do układu mechanicznego wynika z większej sztywności układu. W przypadku modelu matematycznego z uwzględnieniem czystego ścinania warstwy kleju łączącej przetwornik z belką przesunięcie to jest tym większe, im większa jest sztywność tej warstwy.

LITERATURA

1. Buchacz A., Płaczek M.: Damping of mechanical vibrations using piezoelements, including influence of connection layer's properties on the dynamic characteristic. „Solid State Phenomena" 2009, Vols. 147-149, p. 869-875.
2. Buchacz A., Płaczek M.: Drgania układu mechatronicznego z uwzględnieniem ścinania warstwy łączącej. „Modelowanie Inżynierskie" 2008, t.5, nr 36, p. 335-342.
3. Buchacz A., Płaczek M.: Wpływ właściwości warstwy łączącej na podatność dynamiczną drgającego układu mechatronicznego.W:„Projektowanie mechatroniczne: zagadnienia wybrane. Kraków: AGH, 2008, s. 15-22.
4. Buchacz A., Płaczek M.: Selection of the external electric circuit's parameters in control of the mechatronic system's dynamic flexibility. In: Abstracts of papers for the 5th International Conference Mechatronic Systems and Materials - MSM 2009. Vilnius: Technika, 2009, p. 93-94.
5. Buchacz A., Płaczek M.: The development of the mechatronic system's mathematical model. In: Abstracts of papers for the 5th International Conference Mechatronic Systems and Materials - MSM 2009. Vilnius: Technika, 2009, p. 94-95.
6. Kurnik W.: Damping of mechanical vibrations utilising shunted piezoelements. "Machine Dynamics Problems" 2004, Vol. 28, No. 4, 15 – 26.
7. Osiński Z. (red.): Tłumienie drgań. Warszawa: Wyd. Nauk. PWN, 1997.
8. Pietrzakowski M.: Influence of glue layers on vibration damping of composite plates. In: Proceedings of XVIIIth Symposium Vibrations in Physical Systems. Poznań-Błażejewko, 1998, p. 225-226.
9. Pietrzakowski M.: Active damping of beams by piezoelectric system: effects of bonding layer properties. "International Journal of Solids and Structures" 2001, 38, p. 7885-7897.
10. Preumont A.: Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems. "Solid mechanics and its applications" Springer, 2006.
11. Przybyłowicz, P.M.: Torsional vibration control by active piezoelectric system. "Journal of Theoretical and Applied Mechanics" 1995, 33(4), p. 809-823.
12. Reza Moheimani S.O., Fleming A.J.: Piezoelectric transducers for vibration control and damping. Springer, 2006.
13. Tylikowski, A.: Stabilization of beam parametric vibrations."Journal of the Theoretical and Applied Mechanics" 1993, 31(3), p. 657-670.
14. Walczak J., Pasko M.: Elementy dynamiki liniowych obwodów elektrycznych. Gliwice: Wyd. Pol.Śl., 2001.

VERIFICATION OF APPROXIMATE GALERKIN METHOD'S ACCURACY IN THE VIBRATING MECHATRONIC SYSTEM'S RESEARCH WORKS

Summary. This paper presents problem of the verification of accuracy of approximate Galerkin method in the vibrating mechatronic system research works. The considered mechatronic system is one-dimension vibrating bending beam with piezoelectric transducer bonded to the beam surface and external shunting circuit adjoined to the clamps of the transducer. In order to assign dynamic characteristic of the considered system approximate Galerkin method was used, where approximate solution of differential motion equation was defined as a product of time and displacement eigenfunctions which meet defined boundary conditions.

To verify accuracy of approximate method and introduce possible correction dynamic flexibility of mechanical system – the bending beam without piezoelectric transducer and external electric circuit was assigned twice. First, exact Fourier method was used to calculate periodicity and dynamic flexibility of the mechanical system. Results of exact method ware juxtaposed with results of the mechanical system analysis supported on approximate method. Correction coefficients ware introduced to approximate method to unify results of both methods and to make approximate method useful to investigate mechatronic system, for which use of exact method is impossible.

The verification of approximate Galerkin method was very important because implementation of correction coefficients makes results of analysis of mechatronic system supported on this method very precise.