

ZASTOSOWANIE PURC DO ROZWIĄZYWANIA PŁASKICH LINIOWYCH ZAGADNIENÍ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI Z UWZGLĘDNIENIEM SIŁ MASOWYCH NA WIELOKĄTNYCH OBSZARACH

AGNIESZKA BOŁTUĆ, EUGENIUSZ ZIENIUK

*Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku
e-mail: aboltuc@ii.uwb.edu.pl, ezieniuk@ii.uwb.edu.pl*

Streszczenie. W pracy zaprezentowano efektywny sposób rozwiązywania płaskich zagadnień liniowej teorii sprężystości, dla których uwzględniono występowanie sił masowych. Efektywność zastosowanej techniki polega na wykorzystaniu odpowiednich procedur modelowania obszaru i całkowania po tym obszarze. Wspomniane podejście charakteryzuje się tym, że do całkowania po obszarze niewymagane jest dzielenie obszaru na komórki, jak jest to stosowane w tradycyjnej MEB. Weryfikacji opracowanego podejścia dokonano, biorąc pod uwagę różne typy sił masowych, a otrzymane rezultaty numeryczne porównano z analitycznymi oraz uzyskanymi z innych metod komputerowych.

1. WSTĘP

Zagadnienia z zakresu teorii sprężystości modelowane są między innymi za pomocą przemieszczeniowego równania Naviera-Lamégo, które jest równaniem różniczkowym cząstkowym. Dla tak zamodelowanego zagadnienia można otrzymać brzegowe równanie całkowe (BRC), które stanowi sformułowanie równoważne dla równania cząstkowego Naviera-Lamégo. Rozwiązanie BRC sprowadza się do zastosowania popularnej metody elementów brzegowych (MEB) [1], której główną zaletą w porównaniu z MES jest ograniczenie procesu dyskretyzacji jedynie do brzegu. Ta zaleta jest jednak prawdziwa tylko w przypadku rozwiązywania zagadnień bez uwzględnienia sił masowych. Wzięcie pod uwagę sił masowych wiąże się z koniecznością obliczania trzeciej całki w BRC - całki po obszarze. Ten proces pociąga za sobą konieczność przeprowadzenia dyskretyzacji obszaru na mniejsze podobszary (dzielenie obszaru na tzw. komórki [1]), co praktycznie powoduje eliminację głównej dogodności, jaką charakteryzuje się MEB.

Z tego powodu poszukiwano innych rozwiązań, które wyeliminowałyby wady MEB, nie tracąc na dokładności i stabilności rozwiązań. We własnych pracach do rozwiązywania zagadnień brzegowych otrzymano parametryczne układy równań całkowych (PURC), które są zmodyfikowaną wersją klasycznych BRC. Z powodzeniem stosowano je do rozwiązywania problemów modelowanych równaniem Laplace'a, Helmholtza oraz z zakresu dwuwymiarowej liniowej teorii sprężystości, w których to pomijano występowanie sił masowych. Metoda okazała się efektywna w porównaniu do MEB. Wzięto pod uwagę sposób

modelowania kształtu brzegu, ale także precyzyjność otrzymywanych rezultatów we wszystkich rozpatrywanych przypadkach, modelowanych wspomnianymi równaniami.

Celem niniejszej pracy jest zastosowanie PURC do rozwiązywania płaskich zagadnień teorii sprężystości, w których ma się do czynienia z siłami masowymi. Wiąże się to z koniecznością zastosowania efektywnej procedury do obliczania całek po obszarze bez jego dyskretyzacji (dzielenia obszaru na komórki). Przebadano zagadnienia dotyczące różnych typów sił masowych, a otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniami analitycznymi oraz numerycznymi uzyskanymi za pomocą różnych wariantów metody MEB. Sformułowano także wnioski wynikające z efektywnego wykorzystywania procedury do globalnego obliczania całek na dużych obszarach, bez dzielenia ich na komórki.

2. PURC DLA ZAGADNIENIŃ Z SIŁAMI MASOWYMI

PURC dla równań Naviera-Lamégo (z pominięciem sił masowych) przedstawiony jest za pomocą następującego wzoru [7]

$$0.5\mathbf{u}_p(s_1) = \sum_{r=1}^n J_r(s) \int_{s_{r-1}}^{s_r} \left\{ \bar{\mathbf{U}}_{pr}^*(s_1, s) \mathbf{p}_r(s) - \bar{\mathbf{P}}_{pr}^*(s_1, s) \mathbf{u}_r(s) \right\} ds, \quad (1)$$

$$s_{p-1} \leq s_1 \leq s_p, s_{r-1} \leq s \leq s_r, J_r(s) = \left[\left(\frac{\partial \Gamma_r^{(1)}(s)}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Gamma_r^{(2)}(s)}{\partial s} \right)^2 \right]^{0.5}, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Pierwsza i druga funkcja podcałkowa $\bar{\mathbf{U}}_{pr}^*$, $\bar{\mathbf{P}}_{pr}^*$ we wzorze (1) to brzegowe rozwiązania podstawowe i osobliwe, które w jawnej postaci przedstawione są w [7]. Uwzględniają one w swoim formalizmie matematycznym kształt brzegu zdefiniowany za pomocą dowolnych parametrycznych funkcji $\Gamma_r(s)$.

Postępując w sposób analogiczny jak przedstawiono w pracy [7], ale nie pomijając sił masowych w równaniu Naviera-Lamégo, otrzymano PURC (z uwzględnieniem sił masowych), który przyjmuje następującą postać

$$0.5\mathbf{u}_p(s_1) = \sum_{r=1}^n J_r(s) \int_{s_{r-1}}^{s_r} \left\{ \bar{\mathbf{U}}_{pr}^*(s_1, s) \mathbf{p}_r(s) - \bar{\mathbf{P}}_{pr}^*(s_1, s) \mathbf{u}_r(s) \right\} ds + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{U}}_{pr}^*(s_1, \mathbf{x}) \mathbf{b}_r(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Pojawienie się w (2) całkowania po obszarze determinuje powstanie pytania: czy wszystkie zalety metody (dotyczące w głównej mierze braku dyskretyzacji) pozostaną aktualne. Pozytywna odpowiedź na to pytanie jest uzależniona od zastosowanej techniki całkowania po obszarze wielokątnym.

3. TECHNIKA GLOBALNEGO MODELOWANIA OBSZARÓW I CAŁKOWANIA

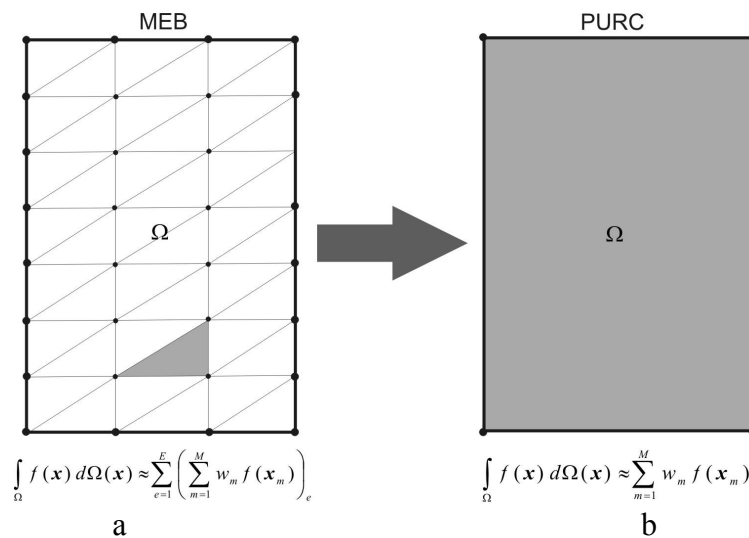
Na sukces PURC w rozwiązywaniu zagadnień z siłami masowymi składa się efektywność dwóch technik: całkowania po obszarze (bez dzielenia na komórki) oraz efektywnego modelowania obszaru w rozwiązywanych zagadnieniach brzegowych. Jeśli weźmie się pod uwagę całkowanie, to zauważa się istnienie dwóch możliwych sposobów postępowania: sprowadzanie całek po obszarze do całek po brzegu (technika możliwa tylko w szczególnych przypadkach) oraz numeryczne obliczanie całki zdefiniowanej w obszarze (technika bardziej uniwersalna). Obie strategie są możliwe do zastosowania w PURC, jednak bardziej wskazane jest skupienie się na technice uniwersalnej, którą można zastosować bez względu na typ zagadnienia. W przypadku popularnej MEB [1] (służącej do rozwiązywania BRC) numeryczne całkowanie po obszarze sprowadza się do podzielenia go na mniejsze podobszary

o elementarnych kształtach, obliczaniu całek na podobszarach i sumowaniu otrzymanych wartości pośrednich (rys.1a). Powoduje to jednak pozbycie się podstawowej zalety MEB, jaką jest brak dyskretyzacji obszaru.

Dlatego też w pracy autorzy postanowili odpowiedzieć na pytanie, czy istnieje możliwość zastosowania takiej strategii, która całkowicie wyeliminuje konieczność dyskretyzacji obszaru, czyli dzielenia go na komórki. Okazało się, że jest taka możliwość, a wstępne założenia takiej techniki zostały zaprezentowane w [8] w odniesieniu do rozwiązywania liniowego równania różniczkowego Poissona. W celu otrzymania rezultatów o wysokiej dokładności zastosowanie wspomnianego podejścia wymagało jednak rozwiązania dwóch problemów: użycia efektywnego sposobu modelowania obszaru do całkowania oraz wykorzystania kwadratury numerycznej wysokiego rzędu.

Pierwszy z problemów został rozwiązany poprzez zastosowanie znanych i popularnych w grafice komputerowej płatów prostokątnych Béziera [2]. W pracy skoncentrowano się na rozwiązywaniu zagadnień zdefiniowanych na obszarach wielokątnych, a do ich zamodelowania użyto płatów Béziera stopnia pierwszego (rys.1b). Spowodowało to opracowanie metody, która niezależnie od rodzaju rozwiązywanego zagadnienia (z siłami masowymi czy bez) wymaga tej samej liczby danych niezbędnych do modelowania rozpatrywanego zagadnienia. Przykładowo, dla obu wspomnianych zagadnień brzegowych zdefiniowanych na obszarach wielokątnych zadawane są tylko punkty narożne wielokąta. Modelowanie bardziej złożonych kształtów (np. z brzegiem krzywoliniowym) wymagałoby zastosowania płatów stopnia trzeciego, w których, sterując punktami kontrolnymi, możliwe jest łatwe otrzymanie kształtu znacznie zmodyfikowanego [2].

Kolejny etap badań dotyczył zastąpienia procedury całkowania numerycznego znanej z MEB, polegającej na dzieleniu obszaru na komórki, na których są stosowane kwadratury niskiego rzędu, procedurą inną, polegającą na globalnym całkowaniu po całym obszarze, bez dzielenia go na tzw. komórki. Wspomniana procedura opiera się na stosowaniu kwadratury wysokiego rzędu na całym rozpatrywanym obszarze, globalnie zdefiniowanym jednym płatem Béziera (Rys.1b).



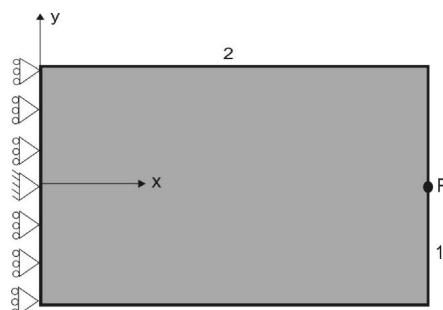
Rys. 1. Modelowanie i całkowanie po obszarze w: a) MEB, b) PURC

4. ANALIZA ROZWIĄZAŃ

W pracy rozwiązano szereg różnorodnych zagadnień z zakresu płaskiej liniowej teorii sprężystości, dla których uwzględniono występowanie sił masowych. W celu dokładnego zbadania zastosowanych technik rozpatrzono różne typy sił masowych: siły grawitacyjne, odśrodkowe (powstałe w wyniku obrotu ciała wokół stałej osi) oraz dotyczące oddziaływania stacjonarnego pola temperatur. Rozważono obszary wielokątne modelowane za pomocą płatów prostokątnych Béziera stopnia pierwszego [2], do których zdefiniowania użyto jedynie czterech punktów narożnych. Otrzymane rezultaty porównano z rozwiązaniami analitycznymi oraz numerycznymi uzyskanymi za pomocą innych metod.

4.1. Siły grawitacyjne

W przykładzie rozważono tarczę prostokątną o rozmiarach i warunkach brzegowych zaprezentowanych na rys.2. Ciało dodatkowo poddane jest działaniu siły masowej w kierunku osi x ($b_x = \rho g = 1 \frac{KN}{m^3}$). Wartości stałych materiałowych użytych do obliczeń wynoszą $E = 10MPa$, $\nu = 0.3$.



Rys. 2. Tarcza poddana działaniu sił grawitacyjnych

Rozwiązania analityczne zamieszczone w [4], przedstawione są w następującej postaci

$$\sigma_x = \rho g(2 - x), \quad u = \frac{\rho g}{2E} x(4 - x). \quad (3)$$

Zbadano przemieszczenie u na brzegu w punkcie P oraz naprężenia σ_x w przekroju poziomym przechodzącym przez środek obszaru. Otrzymane rezultaty porównano z rozwiązaniami analitycznymi (3) i numerycznymi zaczerpniętymi z literatury, uzyskanymi za pomocą: metody wielokrotnej zasady wzajemności MEB (w dwóch wariantach różniących się wartością stałej występującej w rozwiązaniu podstawowym) [4], metody podwójnej zasady wzajemności MEB [5] oraz metody rozwiązań podstawowych [3]. Wyniki analizy zaprezentowano w tabeli 1 i 2.

Tabela 1. Przemieszczenia u w punkcie P

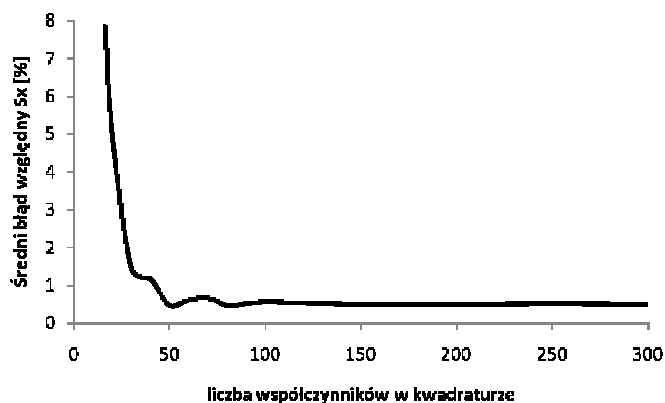
	Analityczne	MWZW		MPZW MEB	MRP	PURC
		MEB (i)	MEB(ii)			
u	0.2	0.2017	0.1988	0.2012	0.2015	0.2012
błąd względny		0.85%	0.60%	0.60%	0.75%	0.60%

Tabela 2. Naprężenia σ_x w przekroju $y=0$

x	Analityczne	MWZW MEB (i)	MWZW MEB(ii)	MRP	PURC
0	2.000	2.009	2.036	2.000	2.028
0.25	1.750	1.753	1.774	1.750	1.771
0.5	1.500	1.492	1.512	1.500	1.513
0.75	1.250	1.237	1.255	1.250	1.252
1	1.000	0.986	1.003	1.000	1.001
1.25	0.750	0.738	0.752	0.750	0.752
1.5	0.500	0.491	0.501	0.500	0.498
1.75	0.250	0.244	0.251	0.250	0.251
2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
błąd względny		1.174%	0.692%	0%	0.573%

Uzyskane rezultaty (zaprezentowane w tabeli 1 i 2) charakteryzują się dużą dokładnością w porównaniu z rozwiązaniami analitycznymi. Wartości średnich błędów względnych rozwiązań, zarówno dla naprężeń jak i przemieszczeń, nie przekraczają 0.6%. Zastosowany globalny sposób całkowania po obszarze w PURC wypada również obiecująco na tle pozostałych metod numerycznych, szczególnie gdy bierze się pod uwagę fakt, iż w ich przypadku całka po obszarze była sprowadzona do całki po brzegu.

Sprawdzono również, jaki wpływ na dokładność otrzymywanych rezultatów numerycznych ma przyjęty rząd kwadratury do globalnego całkowania po obszarze w PURC. Wyliczono średni błąd względny dla naprężeń σ_x w badanym przekroju i sprawdzono jego wartość dla różnej liczby współczynników w kwadraturze Gaussa-Legendre'a (<16..300>). Uzyskane rezultaty zaprezentowano na rys.3.



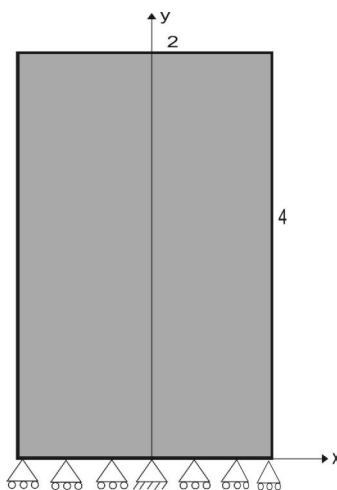
Rys. 3. Wpływ liczby współczynników kwadratury na dokładność rozwiązań

Analizując wyniki zaprezentowane na rys. 3, można stwierdzić, że, przyjmując w kwadraturze 50 współczynników i więcej, otrzymywane są rozwiązania o zadowalającej dokładności (średni błąd względny nie przekracza 1%).

4.2. Siły odśrodkowe

W kolejnym przykładzie rozpatrzono zagadnienie związane z innym typem sił masowych, powstałych w wyniku obrotu ciała wokół stałej osi x. Rozpatrzono zagadnienie zobrazowane

na rys.4, dla którego przyjęto takie same wartości stałych materiałowych jak w poprzednim przykładzie oraz $\omega = 10s^{-1}$ i $\rho = 10 \frac{kg}{m^3}$. Siły masowe wynoszą $b_y = \rho\omega^2 y$.

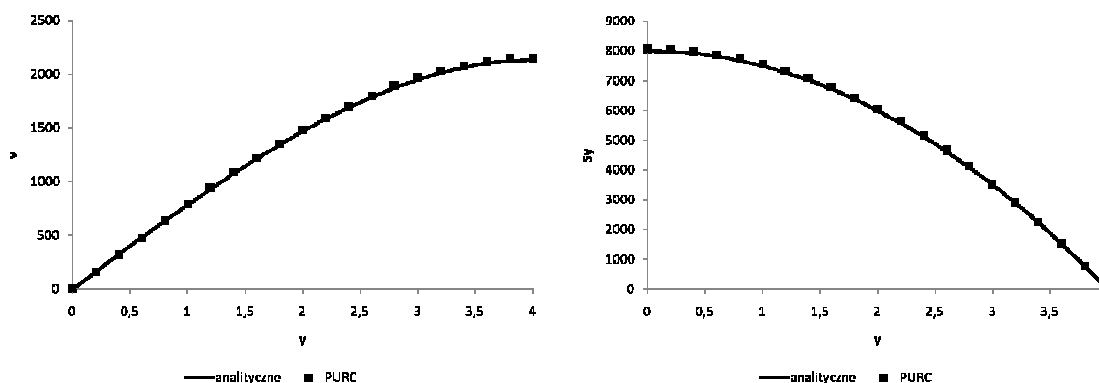


Rys. 4. Kształt obszaru, rozmiary i warunki brzegowe dla zagadnienia z siłami odśrodkowymi

Rozwiązania analityczne [4,6] przedstawione są za pomocą następujących wzorów

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 8\rho\omega^2 - \frac{y^2}{2}\rho\omega^2, \quad \tau_{xy} = 0, \quad v = \frac{\rho\omega^2}{2E}y\left(16 - \frac{y^2}{3}\right). \quad (4)$$

Zbadano rozwiązanie dla naprężeń normalnych i przemieszczeń w kierunku osi y w przekroju pionowym przechodzącym przez środek obszaru. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 5.



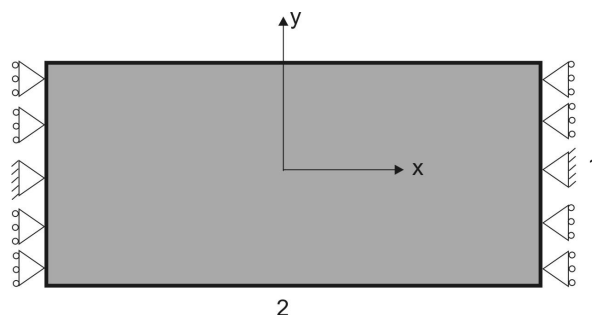
Rys. 5. Rezultaty otrzymane za pomocą PURC w porównaniu do rozwiązań analitycznych

Jak widać, otrzymane rezultaty numeryczne pozostają w dużej zgodności z analitycznymi. Średnie błędy względne dla przemieszczeń v oraz naprężeń σ_y wynoszą odpowiednio 0.7044% oraz 0.7963%.

4.3. Obciążenie termiczne

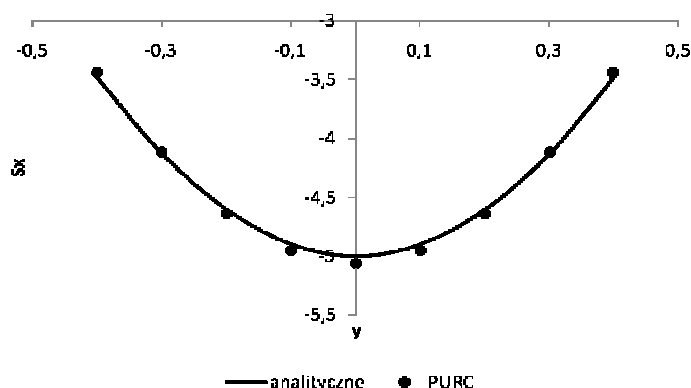
Ostatni z przykładów dotyczy ustalonego zagadnienia termosprężystości (rys. 6), w którego przypadku całka po obszarze zależy od stacjonarnego pola temperatury. Przyjęto następujące wartości stałych materiałowych oraz współczynnika rozszerzalności cieplnej:

$E = 10000\text{MPa}$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.00001\text{C}^{-1}$. Zagadnienie rozwiązano jako zagadnienie teorii sprężystości z uwzględnieniem pseudosił masowych $b_m = \alpha(3\lambda + 2\mu)\theta_m$ ($m = x, y$) oraz pseudosił brzegowych $p_m = \alpha(3\lambda + 2\mu)\theta n_m$ ($m = x, y$), które odpowiadają wzrostowi temperatury o $\theta(\text{C}^\circ)$. Wzięto pod uwagę $\theta = 50 \sin(2y)$.



Rys. 6. Kształt obszaru, rozmiary i warunki brzegowe

Zbadano naprężenia σ_x w przekroju $x = 0$, a otrzymane wartości numeryczne porównano z wynikami analitycznymi $\sigma_x = -E\alpha\theta$ [3]. Rezultaty analizy zaprezentowano na rys.7.



Rys. 7. Rezultaty otrzymane za pomocą PURC w porównaniu do rozwiązań analitycznych

Tak jak w poprzednich przykładach, można powiedzieć o zadowalającej dokładności rozwiązań, gdyż średni błąd względny w tym przypadku wynosi 0.85%. Należy także podkreślić, iż rozważany obszar prostokątny zamodelowany został za pomocą jedynie czterech punktów narożnych niezbędnych do prawidłowego zdefiniowania płata prostokątnego Béziera pierwszego stopnia. Jest to proces zdecydowanie prostszy i bardziej efektywny niż dzielenie obszaru na komórki.

5. WNIOSKI

Wyniki uzyskane z rozwiązywania zagadnień brzegowych z różnymi typami sił masowych potwierdzają słuszność i skuteczność zastosowanego sposobu modelowania obszarów i globalnego obliczania całek po tych obszarach. Charakteryzują się one wysoką dokładnością przy niewielkiej liczbie danych niezbędnych do ich uzyskania. Otrzymywane wyniki są więc zachęcające do rozpoczęcia badań nad zastosowaniem koncepcji do rozwiązywania zagadnień z obszarami bardziej złożonymi, a w dalszej kolejności nieliniowych zagadnień teorii

sprężystości czy innych (gdzie niezbędne jest obliczanie całek po obszarze). Uzyskane wyniki są też zachętą do uogólnienia zastosowanej strategii dotyczącej globalnego obliczania całek na zagadnienia trójwymiarowe.

Praca naukowa jest częściowo finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 jako projekt badawczy.

LITERATURA

1. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C.: Boundary element techniques, theory and applications in engineering. New York: Springer, 1984.
2. Foley J. D.: Wprowadzenie do grafiki komputerowej. Warszawa: WNT, 2001.
3. Medeirosa G. C., Partridgea P. W., Brandao J. O.: The method of fundamental solutions with dual reciprocity for some problems in elasticity.” Engineering Analysis with Boundary Elements” 2004, 8, p. 453–461.
4. Neves A.C., Brebbia C.A.: The multiple reciprocity boundary element method in elasticity: a new approach for transforming domain integrals to the boundary. “International Journal for Numerical Methods in Engineering” 1991, 31, p. 709–27.
5. Partridge P.W., Sensale B.: Hybrid approximation functions in the dual reciprocity boundary element method. “Communications in Numerical Methods in Engineering” 1997, 13, p. 83-94.
6. Yan F., Wang Y.H., Tham L.G., Cheung Y.K.: Dual reciprocity hybrid boundary node method for 2-D elasticity with body force. “Engineering Analysis with Boundary Elements” 2008, 32, p. 713–725.
7. Zieniuk, E., Bołtuć, A.: Non-element method of solving 2D boundary problems defined on polygonal domains modeled by Navier equation. “International Journal of Solids and Structures” 2006, 43, p. 7939-7958.
8. Zieniuk E., Szerszeń K., Bołtuć A.: Globalne obliczanie całek po obszarze w PURC dla dwuwymiarowych zagadnień brzegowych modelowanych równaniem Naviera-Lamego i Poissona. „Modelowanie Inżynierskie” 2007, t. 2, nr 33, s.181-186.

AN APPLICATION OF PIES TO SOLVING PLANE LINEAR PROBLEMS OF ELASTICITY WITH BODY FORCES ON POLYGONAL DOMAINS

Summary. The paper presents an effective approach to solving plane, linear problems of elasticity with body forces. The effectiveness of the applied technique bases on using suitable procedure for modeling of a domain and then for integrating over that domain. The mentioned approach is characterized by the fact that for integrating over domain one does not require division of a domain into cells, like it is in classic BEM. Verification of the developed approach has been made taking into account the different types of body forces, and the results obtained were compared with the analytical and numerical results from other methods.