

## NUMERYCZNE OBLICZANIE OSOBLIWYCH CAŁEK POWIERZCHNIOWYCH DLA ZAGADNIEŃ PRZESTRZENNYCH W PURC

EUGENIUSZ ZIENIUK, KRZYSZTOF SZERSZEŃ

*Institut Informatyki, Zakład Metod Numerycznych, Uniwersytet w Białymstoku  
e-mail: ezieniuk@ii.uwb.edu.pl, kszerszen@ii.uwb.edu.pl*

Streszczenie. W pracy dokonano szczegółowego opisu sposobu numerycznego obliczania całek powierzchniowych w parametrycznym układzie równań całkowych (PURC). W pracy rozpatrywano całki regularne, ale głównie skoncentrowano się na sposobie obliczania całek osobliwych. Na bazie przytoczonego algorytmu opracowano pakiet oprogramowania, praktycznie przetestowany na zagadnieniach brzegowych związanych z wyznaczaniem pola temperatury. Przeprowadzona analiza dotyczyła wpływu liczby współczynników w kwadraturach na ostateczną dokładność otrzymywanych rozwiązań oraz czas obliczeniowy.

### 1. WSTĘP

W realizowanych przez autorów pracach badawczych w celu uproszczenia sposobu modelowania obszarów w zagadnieniach brzegowych dokonano alternatywnego, w stosunku do klasycznych metod elementowych, opisu kształtu przestrzennego brzegu. W tym celu użyto szeroko stosowane w grafice komputerowej parametryczne krzywe i płaty powierzchni [3]. Taki sposób modelowania brzegu w zagadnieniach brzegowych był możliwy po wcześniejszym analitycznym zmodyfikowaniu klasycznych brzegowych równań całkowych (BRC). W wyniku modyfikacji otrzymane wyrażenie matematyczne było w pracy [10] opublikowane pod nazwą parametrycznego układu równań całkowych (PURC).

W przypadku rozwiązywania przestrzennych zagadnień brzegowych niezwykle istotnym problemem okazało się opracowanie efektywnego i dokładnego sposobu obliczania całek odnoszących się głównie do dużych płatów powierzchniowych. Całki te zostały matematycznie zdefiniowane w dwuwymiarowej płaszczyźnie odwzorowania dla czworokątnych płatów powierzchniowych. Efektywne wyznaczenie takich całek wprowadziło możliwość zastosowania płatów parametrycznych do bezpośredniego opisu brzegu w zagadnieniach przestrzennych. Pozwoliło to na wydatne uproszczenie opisu brzegu, np. w porównaniu z siatką elementów brzegowych.

W początkowym etapie badań najbardziej naturalnym podejściem wydawało się bezpośrednie wykorzystanie znanych kwadratur numerycznego całkowania, stosowanych w tradycyjnej metodzie elementów brzegowych (MEB). Niestety dostępne w literaturze tabelaryzowane wartości współczynników wagowych dla tych kwadratur zawierają

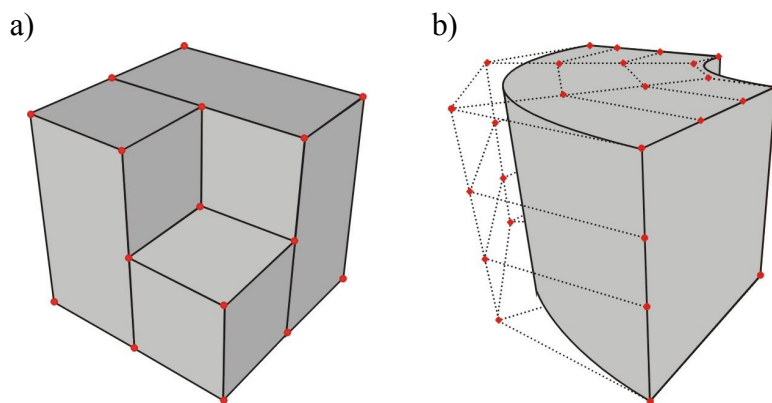
ograniczoną ich liczbę. Związane jest to ze specyfiką MEB polegającą na podziale brzegu na dużą ilość niewielkich elementów brzegowych.

W przypadku proponowanego sposobu modelowania brzegu wprowadzono mniejszą liczbę płatów, ale o zdecydowanie większym polu powierzchni niż w przypadku tradycyjnych elementów brzegowych stosowanych w MEB. Stąd też bezpośrednie wprowadzenie tradycyjnych kwadratur numerycznego całkowania, o niewielkiej liczbie współczynników wagowych, okazało niewystarczające w celu uzyskania rozwiązań z zadawalającą dokładnością. Wobec tego zachodziła konieczność wprowadzenia bardzo dużej liczby współczynników wagowych w kwadraturach oraz przebadanie ich wpływu na dokładność rozwiązań i czas obliczeniowy.

## 2. MODELOWANIE BRZEGU PŁATAMI POWIERZCHNI W PURC

W ramach prowadzonych prac badawczych podjęto próbę modelowania brzegu dla zagadnień przestrzennych w sposób zaczerpnięty wprost z grafiki komputerowej. Mówimy tutaj o możliwości wykorzystania różnego rodzaju parametrycznych płatów powierzchni, niezwykle popularnych w przypadku komputerowej wizualizacji trójwymiarowych obiektów geometrycznych [3]. Jednocześnie taki sposób modelowania jest szeroko wykorzystywany w projektowaniu struktur mechanicznych w systemach CAD [6].

Realizacja takiego modelowania jest bardzo efektywna, ponieważ praktycznie została sprowadzona do zadawania niewielkiego zbioru punktów narożnych i kontrolnych. Zadane punkty matematycznie definiują parametryczne płyty powierzchni, w przypadku obszarów wielokątnych, jak pokazano na rys. 1a, są one fizycznie punktami narożnymi. W przypadku obszarów krzywoliniowych (rys. 1b) dodatkowo zadawane są też punkty kontrolne, służące do efektywnego wykrzywiania płatów w zależności od rzeczywistego kształtu brzegu rozpatrywanego zagadnienia brzegowego.



Rys. 1. Modelowanie obszarów płatami powierzchni: a) wielokątnego za pomocą 12 prostokątnych płaskich płatów Coonsa i po zadaniu 17 punktów narożnych, b) krzywoliniowego za pomocą 4 płatów Béziera oraz 2 Coonsa i po zadaniu 48 punktów narożnych oraz kontrolnych składowych płatów powierzchni

Wykreowany na podstawie odpowiednich zestawień parametrycznych płatów powierzchni przestrzenny model obszaru nie jest już w żaden sposób dzielony na jakiegokolwiek elementy. Taki sposób modelowania brzegu jest możliwy tylko do bezpośredniego zastosowania w zmodyfikowanym BRC, jakim jest PURC. Formuła PURC w przypadku problemów brzegowych opisanych równaniem Laplace'a przedstawiana jest w następującej postaci [11]

$$0.5u_l(v_1, w_1) = \sum_{j=1}^n \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{w_{j-1}}^{w_j} \left\{ \bar{U}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) p_j(v, w) - \bar{P}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) u_j(v, w) \right\} J_j(v, w) dv dw \quad (1)$$

przy czym  $v_{j-1} < v_1, v < v_j, w_{j-1} < w_1, w < w_j, l = 1, 2, 3 \dots n$ .

Funkcje podcałkowe  $\bar{U}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w), \bar{P}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w)$  są przedstawiane w następującej postaci

$$\bar{U}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{[\eta_{lj\{1\}}^2 + \eta_{lj\{2\}}^2 + \eta_{lj\{3\}}^2]^{0.5}}, \quad (2)$$

$$\bar{P}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) = \frac{1}{4\pi} \frac{\eta_{lj\{1\}} n_{j\{1\}} + \eta_{lj\{2\}} n_{j\{2\}} + \eta_{lj\{3\}} n_{j\{3\}}}{[\eta_{lj\{1\}}^2 + \eta_{lj\{2\}}^2 + \eta_{lj\{3\}}^2]^{1.5}}. \quad (3)$$

Pozwalają one na uwzględnienie w swoim formalizmie matematycznym brzegu za pomocą płatów parametrycznych  $P(v, w)$

$$\begin{aligned} \eta_{lj\{1\}} &= P_{l\{1\}}(v_1, w_1) - P_{j\{1\}}(v, w), & \eta_{lj\{2\}} &= P_{l\{2\}}(v_1, w_1) - P_{j\{2\}}(v, w), \\ \eta_{lj\{3\}} &= P_{l\{3\}}(v_1, w_1) - P_{j\{3\}}(v, w), & \eta_{lj} &= [\eta_{lj\{1\}}^2 + \eta_{lj\{2\}}^2 + \eta_{lj\{3\}}^2]^{0.5}. \end{aligned} \quad (4)$$

Funkcja  $J_j(v, w)$  jest jacobianem, natomiast  $n_{j\{1\}}, n_{j\{2\}}, n_{j\{3\}}$  są składowymi wektora normalnego do brzegu.

### 3. NUMERYCZNE OBLICZANIE CAŁEK POWIERZCHNIOWYCH W PURC

Rozwiązywanie zagadnień brzegowych na podstawie przedstawionych w poprzednim punkcie modelowaniu brzegu i zamieszczonego aparatu matematycznego (1) wymaga obliczania pojawiających się całek regularnych i osobliwych w formule PURC. Poniżej przedstawiono wykorzystaną do numerycznego całkowania kwadraturę Gaussa-Legendre'a dla funkcji dwóch zmiennych [1]

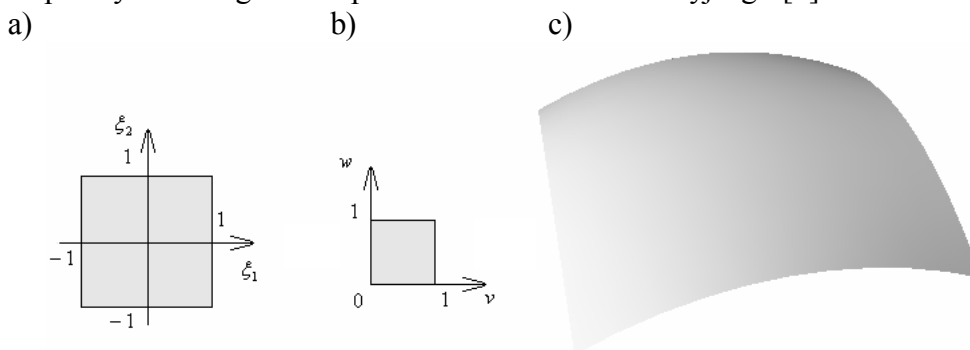
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \cong \sum_{g=1}^{G_g} \sum_{h=1}^{G_h} f(\xi_g, \xi_h) \omega_g \omega_h, \quad (5)$$

przy czym  $\xi_g, \xi_h$  to węzły kwadratury,  $\omega_g, \omega_h$  są powiązаныmi z węzłami wartościami funkcji wagowych (współczynnikami), zaś  $G_g, G_h$  liczbą wprowadzonych węzłów kwadratury.

#### 3.1 Obliczanie całek regularnych

Do obliczenia całek powierzchniowych zdefiniowanych na dwuwymiarowej płaszczyźnie odniesienia dla płatów prostokątnych Coonsa oraz Béziera zastosowano kwadratury Gaussa-Legendre'a (5). Dostępne w literaturze [2] (stosowane w MEB) stabelaryzowane wartości współczynników wagowych dla tych kwadratur w stosowanym PURC są niewystarczające. Dlatego też w pracy wprowadzono rekurencyjne procedury generowania dowolnej liczby współczynników w kwadraturze Gaussa-Legendre'a [9]. Następnie na podstawie wzoru (5) obliczano całki powierzchniowe dla funkcji podcałkowych  $\bar{U}_{lj}^*, \bar{P}_{lj}^*$  przedstawionych odpowiednio wzorami (2, 3).

Zgodnie z rRys. 2 każdy z płatów powierzchniowych modelujących rzeczywistą część brzegu jest w PURC odwzorowywany do dwuwymiarowej płaszczyzny ze zmiennymi  $v, w$ , o znormalizowanych bokach o długości równej jeden (rys. 2b), a następnie płaszczyzna ta jest odwzorowywana do płaszczyzny ze zmiennymi  $\xi_1, \xi_2$  (rys. 2a). W płaszczyźnie tej jest zdefiniowana standardowa kwadratura Gaussa-Legendre'a, dla której są następnie wyliczane węzły i współczynniki wagowe na podstawie wzoru rekurencyjnego [9].



Rys. 2. Schemat całkowania numerycznego w PURC dla całek zdefiniowanych na płatach prostokątnych (Coonsa, Béziera): a) kwadratura Gaussa-Legendre'a, b) lokalna prostokątna płaszczyzna odwzorowania  $v, w$  płata, c) płat powierzchni

Ostatecznie w takim przypadku formuła (1) jest przekształcana do postaci

$$0.5u_l(v_1, w_1) = \sum_{j=1}^n \sum_{p=0}^N \sum_{r=0}^M \sum_{g=1}^{G_g} \sum_{h=1}^{G_h} \left\{ p_j^{(pr)} \bar{U}_{ij}^*(v_1, w_1, \xi_g, \xi_h) - u_j^{(pr)} \bar{P}_{ij}^*(v_1, w_1, \xi_g, \xi_h) \right\} T_j^{(p)}(\xi_g) T_j^{(r)}(\xi_h) J_j(\xi_g, \xi_h) \omega_g \omega_h, \quad (6)$$

gdzie  $n$  jest liczbą modelujących powierzchnię brzegu płatów powierzchni,  $N, M$  liczbą wprowadzonych na każdym z płatów punktów kolokacji zastosowanej do numerycznego rozwiązania PURC metody pseudospektralnej [4], natomiast  $G_g, G_h$  liczbą wprowadzonych węzłów dla kwadratur na każdym ze składowych płatów powierzchni.

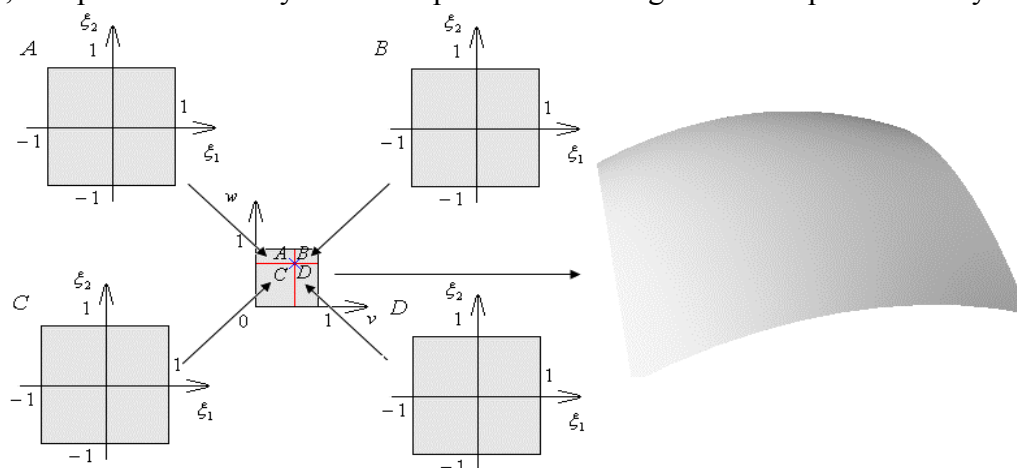
### 3.2 Obliczanie całek osobliwych

W wyrażeniach podcałkowych (2) i (3) w przypadku  $l = j$  pojawiają się punkty osobliwe, dlatego też bezpośrednie zastosowanie kwadratur dla całek regularnych w tym przypadku jest niemożliwe. W przypadku MEB w literaturze [5] znane są następujące strategie obliczania całek osobliwych dla zagadnień przestrzennych:

- wyznaczanie wartości tych całek w sposób analityczny,
- stosowanie kwadratur dedykowanych dla całek osobliwych,
- przekształcenia regularyzacyjne takich całek,
- obliczenia takich całek we współrzędnych polarnych,
- izolacja punktu osobliwego poprzez podział obszaru całkowania na składowe płaszczyzny całkowania z zastosowaniem standardowych kwadratur całkowania dla całek regularnych.

W celu obliczania całek osobliwych występujących w PURC zastosowano strategię najprostszą polegającą na wydzieleniu punktu osobliwego poprzez podział lokalnej płaszczyzny odwzorowania (rys. 2b) na 4 płaszczyzny składowe względem punktu

osobliwego. Następnie oddzielnie do każdej z czterech płaszczyzn zastosowano sposób całkowania omówiony w punkcie 3.1. Taki sposób postępowania jest sposobem najprostszym a zarazem uniwersalnym i niezależnym od rodzaju płata stosowanego do modelowania brzegu, tzn. płata Coonsa czy Béziera. Sposób ten został graficznie zaprezentowany na rys. 3.

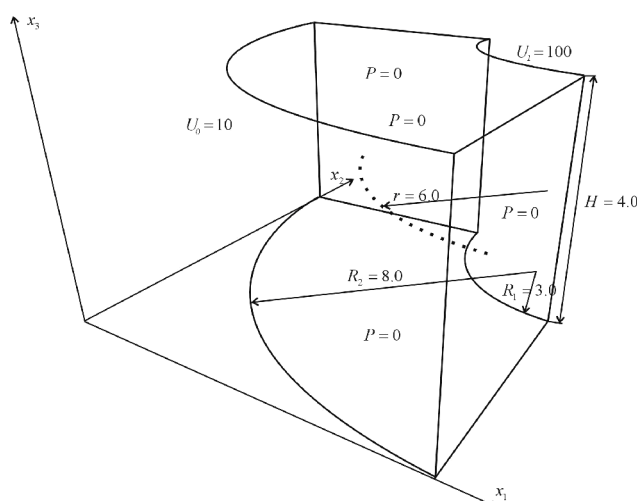


Rys. 3. Wydzielenie punktu osobliwego dla powierzchni prostokątnej poprzez podział na 4 płaszczyzny składowe  $A, B, C, D$  względem punktu osobliwego

Zgodnie z rys. 3 lokalną płaszczyznę odwzorowania ze zmiennymi  $v, w$  podzielono na 4 płaszczyzny składowe  $A, B, C, D$ , a następnie zastosowano dla każdej z płaszczyzn składowych kwadraturę Gaussa-Legendre'a z dużą liczbą współczynników wagowych. Wartości całek dla podobszarów  $A, B, C, D$  zostały następnie zsumowane.

#### 4. WPŁYW LICZBY WSPÓŁCZYNNIKÓW KWADRATUR CAŁKOWANIA NA DOKŁADNOŚĆ ROZWIĄZAŃ

Poniżej przedstawiono wyniki przeprowadzonej analizy wpływu liczby współczynników kwadratury całkowania numerycznego na dokładność rozwiązań oraz czas obliczeń. Analiza była przeprowadzana na bazie problemu brzegowego dla ćwiartki obszaru cylindrycznego z otworem, pokazanym na rys. 4.



Rys. 4. Kontur brzegu, warunki brzegowe oraz punkty w których porównywano rozwiązania

Dla tego przykładu znane jest rozwiązanie analityczne [8]

$$T(r) = U_I + [(U_O - U_I) / \ln(R_O / R_I)] \ln(r / R_I), \quad (7)$$

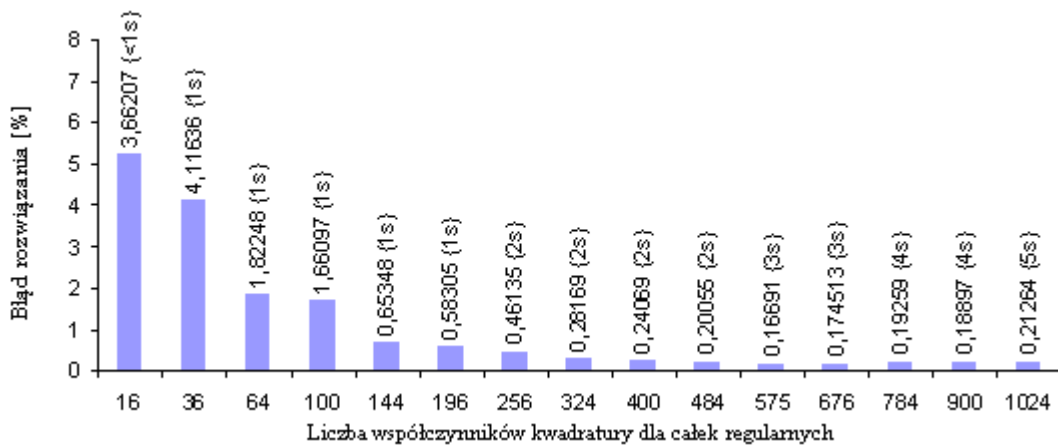
co umożliwiło ocenę dokładności uzyskanych wyników numerycznych.

Rozpatrywany obszar zagadnienia brzegowego wykreowano w sposób przedstawiony już wcześniej na rys. 1b. Na każdym ze składowych płatów obliczenie całek powierzchniowych zrealizowano na podstawie różnej liczby (w przedziale od 16 do 1024) współczynników wagowych. Obliczenia całek osobliwych zrealizowano na podstawie przedstawionej w pkt 3.2 strategii, polegającej na wydzieleniu punktu osobliwego oraz wprowadzeniu również zmiennej liczby współczynników wagowych w kwadraturze, oddzielnie stosowanej do każdej z czterech składowych płaszczyzn pokazanych na rys 3.

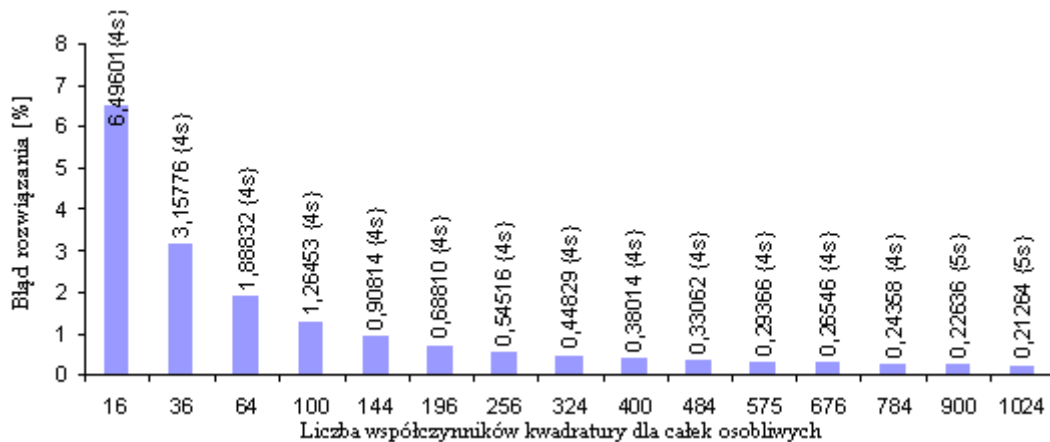
Na wykresach słupkowych (rys. 5 i 6) zestawiono miarę błędów z wykorzystaniem normy  $E_2$  [7] dla rozwiązań numerycznych uzyskanych w 19 punktach obszaru zaznaczonych na rys. 4 kropkami dla  $r = 6.0$ , w porównaniu z rozwiązaniem analitycznym (7). Taką analizę przeprowadzono w wyniku numerycznego rozwiązywania PURC przy zastosowaniu 9 oraz 16 punktów kolokacji na każdym z płatów modelujących brzeg.

Na rys. 5 przedstawiono wyniki uzyskane przy zastosowaniu 9 punktów kolokacji na każdym z płatów.

a)



b)

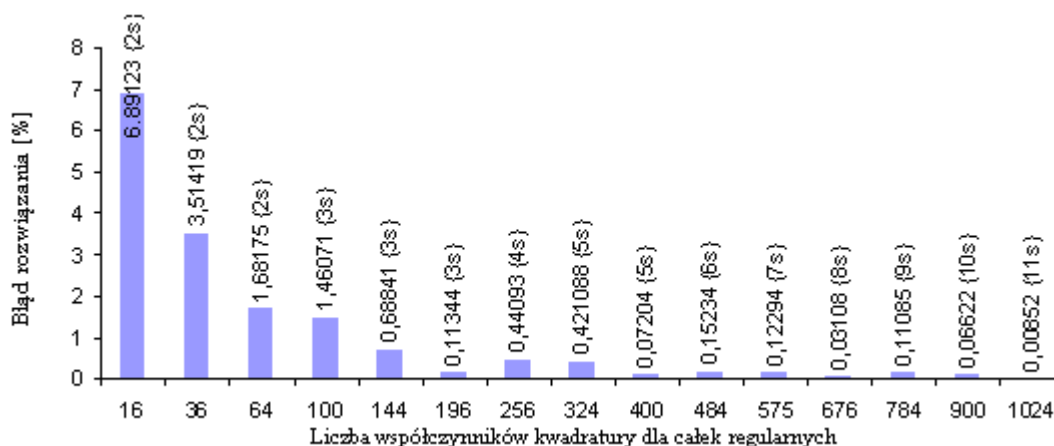


Rys. 5. Wpływ liczby wprowadzonych współczynników kwadratury Gaussa-Legendre'a dla całek: a) regularnych, b) osobliwych na dokładność oraz czas obliczeń

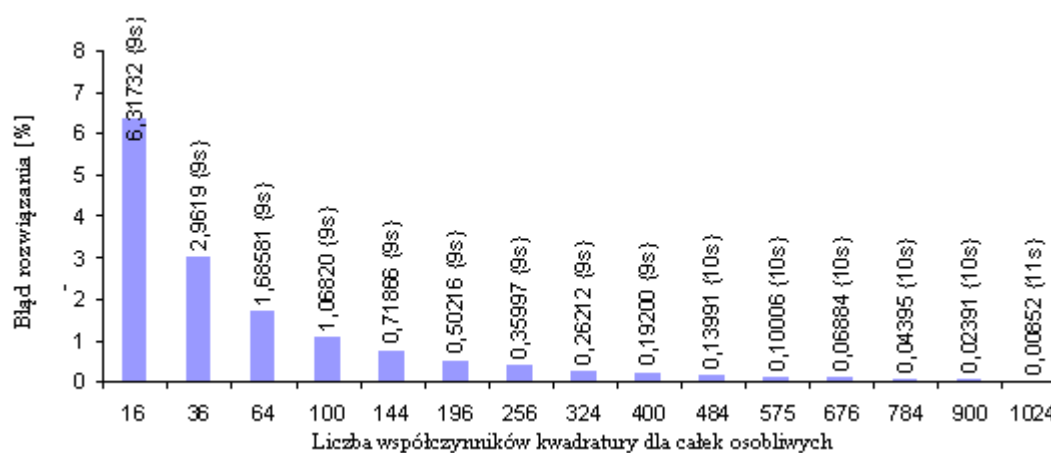
W przypadku wykresu z rys. 5a przyjęto stałą liczbę współczynników kwadratury dla całek osobliwych równą 1024, przy zmiennej liczbie wprowadzonych współczynników kwadratury dla całek regularnych w zakresie od 16 do 1024. Z kolei wyniki z rys. 5b uzyskano dla sytuacji odwrotnej – tym razem przyjęto stałą liczbę współczynników wagowych w kwadraturze dla całek regularnych równą 1024, natomiast zmieniano liczbę współczynników w kwadraturze dla całek osobliwych, również w zakresie od 16 do 1024.

Analogiczną analizę przeprowadzono przy zastosowaniu do rozwiązywania PURC 16 punktów kolokacji (na każdym z płatów), zaś uzyskane wyniki zaprezentowano na rys. 6. Na rys. 6a wyniki uzyskano dla stałej liczby współczynników kwadratury dla całek osobliwych równej 1024, natomiast na rys. 6b przy stałej liczbie współczynników wagowych w kwadraturze dla całek regularnych także równej 1024.

a)



b)



Rys. 6. Wpływ liczby wprowadzonych współczynników kwadratury Gaussa-Legendre'a dla całek: a) regularnych, b) osobliwych na dokładność oraz czas obliczeń

## 5. WNIOSKI

Na podstawie analizy rysunków można stwierdzić, że znaczący wpływ na dokładność rozwiązań, ma dokładność obliczeń całek osobliwych w PURC, z kolei wzrost czasu obliczeniowego jest głównie uzależniony od liczby współczynników w kwadraturze dla całek regularnych. Jest to podyktowane znaczną przewagą takich całek w PURC w porównaniu

z całkami osobliwymi. Dlatego też w praktycznym zastosowaniu PURC wskazane jest stosowanie: ze względu na dokładność obliczeń dużej liczby współczynników dla całek osobliwych, natomiast ze względu na czas obliczeń zastosowanie mniejszej liczby współczynników w przypadku obliczania całek regularnych. Wnioski te potwierdzają też inne przykłady, które nie zostały zamieszczone w pracy.

Praca finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2012 jako projekt badawczy.

## LITERATURA

1. Becker A.A.: The boundary element method in engineering: a complete course. Cambridge : McGraw-Hill Book Company, 1992.
2. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.: Boundary element techniques: theory and applications in engineering. New York : Springer-Verlag, 1984.
3. Farin G., Hoschek J., Kim M.S.: Handbook of computer aided geometric design. Amsterdam : Elsevier, 2002.
4. Gottlieb D., Orszag S.A.: Numerical analysis of spectral methods: theory and applications. Philadelphia : SIAM, 1977.
5. Hall W.S.: Integration methods for singular boundary element integrands. Boundary Elements X (Ed. C. A. Brebbia), Vol. 1. Berlin: Springer-Verlag, 1988, p. 219-236.
6. Hoschek J., Lasser D.: Fundamentals of computer aided geometric design. AK Peters, Wellesley MA 1993.
7. Mukherjee S., Mukherjee X.Y.: Boundary methods – elements, contours and odes. CRC Press 2005.
8. Provatidis C.G.: Three-dimensional coons macroelements in Laplace and acoustic problems. "Computer & Structures" 2005, 83, p. 1572-1583.
9. Stroud A.H.: Gaussian quadrature formulas. Prentice-Hall 1966.
10. Zieniuk E.: A new integral identity for potential polygonal domain problems described by parametric linear functions. "Engineering Analysis with Boundary Elements" 2002, 10(26), p. 897-904.
11. Zieniuk E., Szerszeń K.: Modelowanie kształtu brzegu bikubicznymi płacami Béziiera w wielospójnych potencjalnych zagadnieniach brzegowych. Zesz. Nauk. Kat. Mech. Stos. Pol. Śl.2005, nr 29, s. 539-545.

## NUMERICAL CALCULATION OF SINGULAR INTEGRALS IN 3D PROBLEMS IN THE PIES

Summary. The paper presents a detailed description of computer calculating of the singular surface integrals in parametric integral equation systems (PIES). The problem has been divided to the issues of integration on the regular and singular integrals over parametric patches. On the basis of the considerations software package was developed and tested in practice on issues relating to the appointment of temperature fields. The analysis concerned the impact of the number of coefficients introduced by numerical quadrature for regular and singular integrals on the accuracy of solutions and computation time.