

## METODA WYZNACZANIA FUNKCJI LEPKOSPĘŻYSTOŚCI JEDNOKIERUNKOWYCH POLIMEROWYCH KOMPOZYTÓW WŁÓKNISTYCH

ANDRZEJ P. WILCZYŃSKI

*Institut Mechaniki i Poligrafii, Politechnika Warszawska  
e-mail: aw@imik.wip.pw.edu.pl*

Streszczenie. Praca przedstawia sposób prostego uzyskiwania funkcji lepko-sprężystości badanych kompozytów, unikając pracochłonnych obliczeń wynikających z wprowadzenia zmiennej czasu. Można tego dokonać, zastępując funkcje czasowe w postaci spłotu ich przekształceniami Laplace'a i wybierając najbardziej odpowiednią teorię wzmocnienia kompozytu. W pracy przykładowo przyjęto prostą teorię wzmocnienia do możliwej zamiany. Dalszym etapem pracy jest dobór właściwej funkcji tworzącej lepko-sprężystości, przyjętej w pracy jako funkcja wykładnicza ułamkowa.

### 1. WSTĘP

Przy obecnym stanie rozwoju teorii wzmocnienia materiałów kompozytowych dobór właściwych składników i wybór odpowiednich związków opisujących właściwości mechaniczne tych materiałów właściwie nie stanowi problemu z wyjątkiem kilku odosobnionych przypadków. Do nich należy przewidywanie zmienności czasowej własności mechanicznych, zazwyczaj wymagające stosowania czasochłonnych technik numerycznych. W większości przypadków, w szczególności w odniesieniu do laminatów i obciążeń statycznych, zależności czasowe własności mechanicznych są pomijalne, jednak przy obciążeniach dynamicznych wpływ lepko-sprężystości i związanym z tym tłumieniem w materiale nabiera istotnego znaczenia. To spowodowało zajęcie się tematem lepko-sprężystości w kompozytach polimerowych, gdzie istnieją duże możliwości wprowadzenia uproszczeń i przyspieszenia prac badawczych.

### 2. PODSTAWY TEORETYCZNE

Znaczna liczba teorii wzmocnienia kompozytów włóknistych, powstająca od lat 40. ubiegłego wieku, jak też dobrze rozbudowane teorie laminacji zapewniają opis zjawisk mechanicznych w kompozytach z dobrą dokładnością, przy właściwym wyborze teorii, zapewniającą zazwyczaj kilkuprocentowy błąd w stosunku do danych doświadczalnych. Podobnie opisy zjawisk lepko-sprężystych, rozwijające się znacznie dłużej od teorii kompozytów, prowadzą do mało istotnych różnic w badaniach doświadczalnych. Aby wykorzystać w pełni istniejące, a dotychczas nie w pełni zbadane zależności z obu dyscyplin, należy przeprowadzić odpowiednie badania teoretyczne. W szczególności z istotnych

czynników jest tu wybór właściwej funkcji opisującej zjawiska lepkosprężyste. Praca obecna ma w pewien sposób zapłacić tę lukę.

Oprócz założeń istotnych w podstawach teoretycznych wymienionych teorii, które można znaleźć w literaturze światowej, a której częściowy przegląd dają np. prace autora [1], [2], należy jeszcze wprowadzić dodatkowe, wynikające z problemów modelowania fizycznego i wyników badań doświadczalnych. Te założenia dodatkowe można przedstawić następująco:

- osnowy polimerowe w zakresie stosowanych obciążeń przejawiają własności liniowe,
- prędkości zjawisk zachodzących w kompozytach są znacznie mniejsze od wynikających z opisów wykładniczych,
- pojedynczy mechanizm zależności czasowych nie zapewnia wystarczającej dokładności,
- zmiany objętościowe odkształcenia można uważać za czysto sprężyste,
- w zakresie przewidywanych czasów eksploatacji nieograniczone płynięcie lepkie jest pomijalne.

W celu zapewnienia tych warunków należy w szczególności związki konstytutywne osnowy polimerowej zapisać w formie

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{1}{2G} \left[ s(t) + \omega \int_0^t s(\vartheta) \Phi(t-\vartheta) d\vartheta \right] \\
 &= \frac{1}{2G} \left[ 1 + \omega \int_0^t \Phi(t-\vartheta) d\vartheta \right] \otimes s(t) \\
 f(t) &= \frac{1}{3B} t(t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie  $e$  i  $s$  oraz  $f$  i  $t$  są odpowiednio dewiatorami i aksiatorami tensorów odkształcenia i naprężenia, a  $G$  i  $B$  są stałymi sprężystości, natomiast  $\omega$  oznacza stosunek odkształceń lepkosprężystych do całkowitych. Pierwszy ze związków (1) przedstawia splot, podczas gdy drugi, zgodnie z założeniami, jest wyrażeniem algebraicznym. Pozwala to na proste wykorzystanie przekształcenia Laplace'a obu związków, otrzymując w efekcie

$$\begin{aligned}
 \bar{e}(p) &= \frac{1}{2G} [1 + \omega \bar{\Phi}(p)] \bar{s}(p) \\
 \bar{f}(p) &= \frac{1}{3B} \bar{t}(p)
 \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie  $p$  oznacza parametr przekształcenia Laplace'a, oznaczonego przez nadkreślenie. W tej sytuacji zależności czasowe znikają, a wielkości  $\bar{e}, \bar{s}, \bar{f}, \bar{t}$  są jedynie funkcjami parametru przekształcenia, tworząc wyrażenia algebraiczne. Funkcja  $\Phi(t)$  znana jest jako funkcja tworząca zjawisko i jej dobór posiada bardzo istotne znaczenie w badaniach doświadczalnych. Wykorzystując (2), znajduje się łatwo zależności odwrotne

$$\begin{aligned}\bar{s}(p) &= \frac{2G}{1 + \omega\bar{\Phi}(p)} \bar{e}(p) \\ &= 2G \left[ 1 - \frac{\omega\bar{\Phi}(p)}{1 + \omega\bar{\Phi}(p)} \right] \bar{e}(p)\end{aligned}\quad (3)$$

$$\bar{t}(p) = 3B\bar{f}(p)$$

Stosuje się czasem zapis uproszczony, wykorzystując pojęcie funkcji generującej przy wymuszeniu kinematycznym  $\Psi(t)$ , co prowadzi do uproszczenia zapisu

$$\begin{aligned}\bar{s}(p) &= 2G[1 - \omega\bar{\Psi}(p)]\bar{e}(p) \\ \bar{t}(p) &= 3B\bar{f}(p) \\ \frac{1}{1 + \omega\bar{\Phi}(p)} &= 1 - \omega\bar{\Psi}(p)\end{aligned}\quad (4)$$

Na ogół zaleca się używanie związków typu (2) lub (4), tworząc związki konstytutywne lepkospężystości, podczas gdy w teorii wzmocnienia kompozytów raczej stosuje się tak zwane stałe inżynierskie  $E$  i  $\nu$ . Wymaga to użycia ogólnego wyrażenia odkształcenia

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2G} s_{ik} + \frac{1}{3B} t\delta_{ik}\quad (5)$$

Wynikają z tego wyrażenia

$$E = \frac{9BG}{3B + G}; \nu = \frac{3B - 2G}{2(3B + G)}\quad (6)$$

przydatne do dalszego wykorzystania w opisie lepkospężystości kompozytów.

### 3. ANALIZA TEORII WZMOCNIENIA

Nauka zaczęła się zajmować teorią wzmocnienia kompozytów polimerowych już w latach 40. zeszłego wieku i do chwili obecnej można wyliczyć powyżej stu takich teorii, opisujących własności kompozytów włóknistych z różnymi dokładnościami. Jedna z najściślejszych jest opracowana przez autora [3]. Jej istotną wadą, mimo dokładności, jest dość skomplikowana budowa. Do celów obecnej pracy rozważa się o wiele prostszą teorię [4], która mimo swej prostoty daje wyniki różniące się jedynie o kilka procent od wyników doświadczalnych. Wynikające z niej związki mają postać

$$\begin{aligned}
E_{11} &= E_f f + E_m (1-f) \\
\frac{1}{E_{22}} &= \frac{\sqrt{f}}{E_f} + \frac{\sqrt{1-f}}{E_m} \\
\frac{1}{G_{12}} &= \frac{\sqrt{f}}{G_f} + \frac{\sqrt{1-f}}{G_m} \\
\frac{1}{G_{23}} &= \frac{f}{G_f} + \frac{1-f}{G_m} \\
\nu_{21} &= \nu_f f + \nu_m (1-f)
\end{aligned} \tag{7}$$

Ograniczenie się do mniej ścisłej teorii spowodowane jest chęcią uproszczenia zapisu głównie w celu przedstawienia metody postępowania, a nie możliwie najściślejszych wyników, które i tak musiałyby być wyznaczone dla konkretnego przypadku na drodze numerycznej. Niemniej jednak przedstawione poniżej wyniki powinny być z dokładnością do kilku procent zgodne z odpowiednimi badaniami doświadczalnymi.

Wykorzystując dotychczasowe związki można zapisać transformaty Laplace'a inżynierskich stałych sprężystości, do wykorzystania w teorii wzmocnienia, w postaci

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{G}_m(p)} &= \frac{1}{G} [1 + \omega \bar{\Phi}(p)] \\
\frac{1}{\bar{E}_m(p)} &= \frac{9B+G}{9BG} \left[ 1 + \frac{3\omega B}{3B+G} \bar{\Phi}(p) \right] \\
\bar{E}_m(p) &= \frac{9BG}{3B+G} \left[ 1 - \frac{3\omega B}{3B+G} \bar{\Phi}(p) \right] \\
\bar{\nu}_m(p) &= \frac{3B-2G}{2(3B+G)} \left[ 1 - \frac{3G}{3B-2G} \bar{\Psi}(p) \right]
\end{aligned} \tag{8}$$

do wykorzystania w dalszej części przy budowie związków konstytutywnych kompozytów.

#### 4. PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA TEORII WZMOCNIENIA POLIMEROWYCH KOMPOZYTÓW LEPKOSPREŻYSTYCH

Najprościej jest zapisać początkowe przekształcenia Laplace'a poszczególnych stałych materiałowych wybranych prostych zależności teorii wzmocnienia danych wzorami (7). Otrzymuje się wówczas zależności o dość skomplikowanej budowie, które w celu uzyskania bardziej przejrzystej postaci, można będzie nieco uprościć.

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_{11}(p) &= \frac{E_f f}{p} + \frac{9BG}{3B+G} \left[ \frac{1}{p} - \omega_1 \bar{\Phi}(p) \right] (1-f) \\
 \frac{1}{\bar{E}_{22}(p)} &= \frac{\sqrt{f}}{pE_f} + \frac{3B+G}{9BG} \left[ \frac{1}{p} + \omega_1 \bar{\Phi}(p) \right] \sqrt{1-f} \\
 \frac{1}{\bar{G}_{12}(p)} &= \frac{\sqrt{f}}{pG_f} + \frac{1}{G} \left[ \frac{1}{p} + \omega \bar{\Phi}(p) \right] \sqrt{1-f} \\
 \frac{1}{\bar{G}_{23}(p)} &= \frac{f}{pG_g} + \frac{1}{G} \left[ \frac{1}{p} + \omega \bar{\Phi}(p) \right] (1-f) \\
 \bar{\nu}_{21}(p) &= \frac{\nu_f f}{p} + \frac{3B-2G}{2(3B+G)} \left[ \frac{1}{p} - \omega_2 \bar{\Psi}(p) \right] (1-f) \\
 \omega_1 &= \frac{3\omega B}{3B+G}; \omega_2 = \frac{3G}{3B-2G}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Związki (9) można zapisać w postaci prostszej, używając oznaczeń

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_{11} &= E_f f + \frac{9BG}{3B+G} (1-f); \Omega_1 = \frac{\frac{9\omega_1 BG}{3B+G} (1-f)}{E_f f + \frac{9BG}{3B+G} (1-f)} \\
 \frac{1}{\tilde{E}_{22}} &= \frac{\sqrt{f}}{E_f} + \frac{3B+G}{9BG} \sqrt{1-f}; \Omega_2 = \frac{\frac{3B+G}{9BG} \omega_1 \sqrt{1-f}}{\frac{\sqrt{f}}{E_f} + \frac{3B+G}{9BG} \sqrt{1-f}} \\
 \frac{1}{\tilde{G}_{12}} &= \frac{\sqrt{f}}{G_f} + \frac{\sqrt{1-f}}{G}; \Omega_3 = \frac{\omega \sqrt{1-f}}{\frac{\sqrt{f}}{G_f} + \frac{\sqrt{1-f}}{G}} \\
 \frac{1}{\tilde{G}_{23}} &= \frac{f}{G_f} + \frac{1-f}{G}; \Omega_4 = \frac{\omega (1-f)}{\frac{f}{G_g} + \frac{1-f}{G}} \\
 \tilde{\nu}_{21} &= \nu_f f + \frac{3B-2G}{2(3B+G)} (1-f); \Omega_5 = \frac{\frac{3B-2G}{2(3B+G)} \omega_2 (1-f)}{\nu_f f + \frac{3B-2G}{2(3B+G)} (1-f)}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Bardziej przejrzysta forma związków (9), przy wykorzystaniu tych oznaczeń, ma postać

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{11}(p) &= \tilde{E}_{11} \left[ \frac{1}{p} + \Omega_1 \bar{\Phi}(p) \right] \\
\frac{1}{\bar{E}_{22}(p)} &= \frac{1}{\tilde{E}_{22}} \left[ \frac{1}{p} + \Omega_2 \bar{\Phi}(p) \right] \\
\frac{1}{\bar{G}_{12}(p)} &= \frac{1}{\tilde{G}_{12}} \left[ \frac{1}{p} + \Omega_3 \bar{\Phi}(p) \right] \\
\frac{1}{\bar{G}_{23}(p)} &= \frac{1}{\tilde{G}_{23}} \left[ \frac{1}{p} + \Omega_4 \bar{\Phi}(p) \right] \\
\bar{v}_{21}(p) &= \tilde{v}_{21} \left[ \frac{1}{p} - \Omega_5 \bar{\Phi}(p) \right]
\end{aligned} \tag{11}$$

Jak z powyższego widać, struktura transformat lepkosprężystych stałych materiałowych jest bardzo prosta, za algebraicznie skomplikowane można uważać jedynie stałe, występujące w wyrażeniach (10), upraszczających zapis teorii.

## 5. DOBÓR FUNKCJI TWORZĄCEJ OSNOWY LEPKOSPŘĘŻYSTEGO KOMPOZYTU

Właściwy dobór funkcji tworzącej lepkosprężystości dowolnego materiału, w tym osnowy kompozytu, zależy od wyników badań doświadczalnych i polega na określeniu funkcji wykazującej wymagane cechy stwierdzone w badaniach i umożliwiającej przez określenie tam występujących parametrów zapewnienie założonej dokładności. Metody postępowania są bardzo różne i prowadzą do celu z mniejszym lub większym nakładem pracy. Zdaniem autora najprostszym i najprędzej prowadzącym do celu wyborem jest przyjęcie jako funkcji tworzącej funkcji wykładniczej ułamekowej, zwanej też funkcją Mittag – Leflera [5]. Potrzebne dane do opisu tej funkcji najłatwiej znaleźć w monografii autora [1], skąd pochodzą też wyniki końcowe obecnych rozważań.

Dla przypomnienia warto zauważyć, że zgodnie z (1) można przyjąć

$$e(t) = \frac{1}{2G} \left[ 1 + \omega \int_0^t \Phi(t-\vartheta) d\vartheta \right] \otimes s(t)$$

to stosując w miejsce  $\Phi(t)$  wartość

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= e_\nu(\alpha t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha u(t-\vartheta)} \frac{\alpha u^{\nu-1} du}{1 + 2u^\nu \cos \pi\nu + u^{2\nu}} \\
&= \alpha \sum_1^\infty (-1)^{m-1} \frac{(\alpha t)^{m\nu-1}}{\Gamma(m\nu)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Można też zagadnienie przedstawić prościej, przy użyciu przekształcenia Laplace'a, pisząc zgodnie z (2)

$$\bar{e}(p) = \frac{1}{2G} [1 + \omega \bar{\Phi}(p)] \bar{s}(p)$$

gdzie dla wybranego przypadku otrzymuje się

$$\bar{\Phi}(p) = \frac{\left(\frac{\alpha}{p}\right)^v}{1 + \left(\frac{\alpha}{p}\right)^v} \quad (13)$$

Ze względu na dość skomplikowane obliczenia, prowadzące do prostych wyników, potrzebnych do wykorzystania wybranej funkcji w praktyce, poniżej zestawiono potrzebne wyrażenia opisujące zjawiska lepkospężyste osnowy kompozytu, pobrane z tablicy 9.6, wymienionej w monografii autora [1], gdzie też w tablicy 14.4 podano wartości numeryczne badanej funkcji jak też wynikającej z tych rozważań funkcji pełzania

$$\varphi(t) = e_v^*(\alpha t) = \int_0^t e_v(\alpha(t-\vartheta)) d\vartheta = \sum_1^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(\alpha t)^{mv}}{\Gamma(mv+1)} \quad (14)$$

Tablica 1. Własności funkcji wykładniczej ułamkowej

Funkcja	Symbol	Własności
Funkcja tworząca pełzania	$\Phi(t)$	$\Phi(t) = \omega e_v(\alpha t)$
Funkcja pełzania	$\varphi(t)$	$\varphi(t) = \omega e_v^*(\alpha t)$
Funkcja tworząca relaksacji	$\Psi(t)$	$\Psi(t) = \frac{\omega}{1+\omega} e_v(\beta t)$
Funkcja relaksacji	$\psi(t)$	$\psi(t) = \frac{\omega}{1+\omega} e_v^*(\beta t)$
Moduł zespolony	$G^*(p)$	$G^*(p) = 1 - \frac{\omega}{1+\omega} F_1\left(\frac{p}{\beta}\right) - \frac{i\omega}{1+\omega} F_2\left(\frac{p}{\beta}\right)$
Podatność zespolona	$J^*(p)$	$J^*(p) = 1 + \omega F_1\left(\frac{p}{\alpha}\right) - i\omega F_2\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
Funkcja $F_1(u)$	$F_1$	$F_1(u) = \frac{1 + u^v \cos \frac{\pi v}{2}}{1 + 2u^v \cos \frac{\pi v}{2} + u^{2v}}$
Funkcja $F_2(u)$	$F_2$	$F_2(u) = \frac{u^v \sin \frac{\pi v}{2}}{1 + 2u^v \cos \frac{\pi v}{2} + u^{2v}}$
Parametr	$\beta$	$\beta^v = (1+\omega)\alpha^v$

Jak wynika z powyższej tablicy, funkcje pełzania i relaksacji opisywane są przez te same funkcje, różniąc się jedynie wewnętrznymi parametrami. To samo odnosi się do zjawisk o wymuszeniu dynamicznym (siłowym) i kinematycznym (przemieszczeniowym).

## 6. ZAKOŃCZENIE

Wybór najprostszych i najbardziej zbliżonych do doświadczeń funkcji tworzących lepkosprężystości pozostaje właściwie całkowicie w gestii badacza i zależy od szeregu czynników, w tym być może przyzwyczajień. Przegląd kilku wybranych i wygodnych funkcji tworzących dany jest w monografii autora [1], łącznie z procedurami ich uzyskiwania. Jak się wydaje, oprócz wymienionego zbioru funkcji dużą rolę odgrywały prace rosyjskich badaczy. Przegląd prac takich autorów jak Ju.N. Rabotnov, A.R. Rżanicyn czy M.A. Kołtunov wniosły wiele w teorię tej dziedziny i mimo upływu lat wiele z ich osiągnięć pozostaje nadal aktualnymi. Także w dziedzinie kompozytów polimerowych osiągnięcia uczonych rosyjskich warte są uznania i wykorzystania. Można wymienić tu nazwiska I.I. Goldenblata, A.M. Skudry czy K.A. Rocensa, których prace często wyprzedzały bardziej znanych europejskich uczonych.

## LITERATURA

1. Wilczyński A.P.: Mechanika polimerów w praktyce konstrukcyjnej. Warszawa : WNT, 1984.
2. Wilczyński A.P.: Polimerowe kompozyty włókniste. Warszawa : WNT, 1996.
3. Wilczyński A.P.: A basic theory of reinforcement for unidirectional fibrous composites. "Composite Sci. & Technology" 1992, 38, p. 327 – 337.
4. Weeton J.W. et al.: Engineering guide to composite materials. New York: Amer. Soc. Met., 1987.
5. Fry C.G., Huches H.K.: Asymptotic development of certain integral functions, "Duke Math. J." 1942, 9, p. 791 – 802.

## **A METHOD FOR DETERMINING VISCOELASTIC FUNCTIONS FOR A UNIDIRECTIONAL, FIBROUS POLYMERIC COMPOSITE**

Summary. The paper presents a simple method for obtaining viscoelastic functions of polymeric unidirectional composites, omitting problems developing from introduction of an additional time variable. This is done using Laplace's transforms of the function in question. Selection of an appropriate theory of reinforcement, perhaps more sophisticated than the one used in the exemplary calculation is of value, but more significant is the choice of the viscoelastic master function. In the Author opinion probably the best choice is the fractional exponential function, presenting simple Laplace's transforms and their reversal, as well as other, algebraically expressed viscoelastic relations. The function is tabulated in [1].