

## STEMPEL PARABOLICZNY KONTAKTUJĄCY SIĘ Z POWIERZCHNIĄ PÓŁPRZESRZENI OSŁABIONEJ SZCZELINĄ BRZEGOWĄ

ADAM TOMCZYK

*Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Białostocka  
e-mail: a.tomczyk@pb.edu.pl*

Streszczenie. W pracy zastosowano metodę osobliwych równań całkowych do rozwiązania zagadnienia, w którym paraboliczny stempel kontaktuje się z powierzchnią półprzestrzeni sprężystej osłabionej szczeliną. Wykorzystana metoda umożliwiła jednocześnie określanie rozkładu ciśnienia kontaktowego pod stemplem oraz obliczanie wartości współczynników intensywności naprężeń  $K_I$  i  $K_{II}$  przed wierzchołkiem szczeliny. Zbadano wpływ odległości szczeliny od stempla, długości szczeliny, jej orientacji oraz współczynnika tarcia między stemplem a powierzchnią półprzestrzeni na wartości współczynników intensywności naprężeń oraz na rozkład ciśnienia kontaktowego.

### 1. WSTĘP

W zagadnieniach kontaktowych często zdarza się sytuacja, że jedno lub oba współpracujące ze sobą ciała mogą zawierać różnej postaci uszkodzenia, np. układy szczelin krawędziowych i podpowierzchniowych. W niniejszej pracy skupiono się głównie na analizie efektów związanych z przesuwaniem się dociskanego stempla parabolicznego po powierzchni półprzestrzeni sprężystej osłabionej pojedynczą szczeliną powierzchniową. W analizie tej wykorzystano metodę osobliwych równań całkowych z uwzględnieniem potencjałów zespolonych Muskhelishviliiego [1]. Rozpatrzono płaskie zagadnienie, zakładając, że stempel jest sztywny i pomijając efekty związane z generacją ciepła na skutek tarcia. W literaturze najczęściej modeluje się tego typu zagadnienia, zadając obciążenie w postaci odpowiedniego ciśnienia kontaktowego na powierzchni półprzestrzeni w miejscu działania stempla. Takie podejście znajdziemy m.in. w obszernym cyklu prac Goshimy i współautorów [2÷4], gdzie skoncentrowano się na problemie sztywnego walca kontaktującego się z powierzchnią uszkodzonej półprzestrzeni sprężystej. Podobną tematykę czytelnik odnajdzie także w pracach Hasebe i współautorów [5÷7], gdzie np. rozważano stempel, którego jeden koniec był zaokrąglony, a drugi ostry [6] czy też Panasyuka i współautorów [9÷10], gdzie przedyskutowano problem zamykania się szczeliny z uwzględnieniem możliwości wystąpienia tarcia na jej powierzchniach [9].

Warto podkreślić, że badania przedstawione w pracy stanowią kontynuację badań zapoczątkowanych w pracach Savruka i Yevtushenki (np. [10]) oraz Savruka i innych (np. [11]). Kontynuacja ta dotyczy głównie analizy wpływu kształtu podstawy stempla. W poprzednich pracach rozważano płaski kształt podstawy, zaś w niniejszej pracy – paraboliczny.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

We wspomnianych już pracach Savruka i współautorów [10, 11] przedstawiono rozwiązanie bardziej ogólnego problemu, w którym stempel o dowolnym kształcie podstawy jest dociskany siłą normalną  $P$  i „przesuwa się” pod działaniem siły stycznej  $\rho P$  po powierzchni półprzestrzeni sprężystej osłabionej układem powierzchniowych lub podpowierzchniowych szczelin prostoliniowych bądź krzywoliniowych. Układ równań dla takiego przypadku ma postać (np. [10]):

$$\varepsilon \rho \sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{\sigma(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_L \left[ K_1(t, x) g'(t) dt + L_1(t, x) \overline{g'(t)} \overline{dt} \right] = \frac{4G}{\kappa+1} f'(x), \quad x \in L_0, \quad (1)$$

$$\int_L \left[ K_2(t, t') g'(t) dt + L_2(t, t') \overline{g'(t)} \overline{dt} \right] + \int_{L_0} M(t, t') \sigma(t) dt = \pi p(t'), \quad t' \in L,$$

gdzie:  $L_0$  – opisuje kontur strefy kontaktu między stemplem a powierzchnią półprzestrzeni,  $L$  – opisuje kontur szczeliny,  $t$  – jest zmienną w parametrycznym zapisie (zob. równanie (3)),  $\sigma(t)$  – rozkład ciśnienia kontaktowego między stemplem a powierzchnią półprzestrzeni,  $\varepsilon = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$ ,  $\kappa = 3 - 4\nu$ ,  $G$  – moduł sztywności,  $\nu$  – współczynnik Poissona,  $g'(t)$  – pochodna wektora skoków przemieszczeń na konturach szczelin,  $f(x)$  – funkcja opisującą kształt podstawy stempla,  $p(t')$  – samozrównoważone obciążenie na powierzchniach szczelin. Należy również zwrócić uwagę, że symbol poziomej kreski nad określoną wielkością oznacza wartość sprzężoną liczby zespolonej.

Jądra układu równań (1) można przedstawić w postaci:

$$K_1(t, x) = \frac{2}{\kappa+1} \left[ \kappa f_{21}(t, x) - \overline{f_{22}(t, x)} - x g_{22}(t, x) - \overline{h_{22}(t, x)} \right],$$

$$L_1(t, x) = \frac{2}{\kappa+1} \left[ \kappa f_{22}(t, x) - \overline{f_{21}(t, x)} - x g_{21}(t, x) - \overline{h_{21}(t, x)} \right],$$

$$K_2(t, t') = f_{21}(t, t') + \overline{f_{22}(t, t')} + \frac{\overline{dt'}}{dt} \left[ t' g_{22}(t, t') + \overline{h_{22}(t, t')} \right], \quad (2)$$

$$L_2(t, t') = f_{22}(t, t') + \overline{f_{21}(t, t')} + \frac{\overline{dt'}}{dt} \left[ t' g_{21}(t, t') + \overline{h_{21}(t, t')} \right],$$

$$M(t, t') = f_{11}(t, t') + \overline{f_{11}(t, t')} + \frac{\overline{dt'}}{dt} \left[ t' g_{11}(t, t') + \overline{h_{11}(t, t')} \right].$$

gdzie:

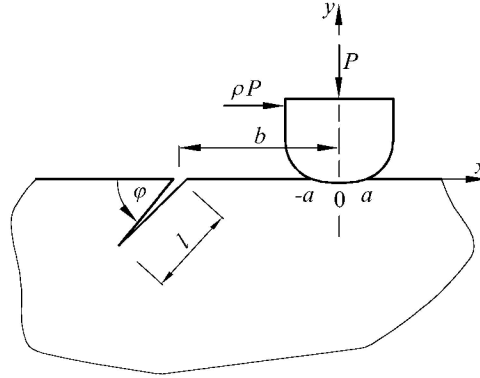
$$f_{11}(t, z) = \frac{1+i\rho}{2i} \frac{1}{t-z}, \quad f_{21}(t, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} \right), \quad f_{22}(t, z) = \frac{t-\bar{t}}{2(\bar{t}-z)^2},$$

$$h_{11}(t, z) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1-i\rho}{t-z} - \frac{t(1+i\rho)}{(t-z)^2} \right], \quad h_{21}(t, z) = -\frac{\bar{t}}{2} \left( \frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(\bar{t}-z)^2} \right), \quad (3a)$$

$$h_{22}(t, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} - \frac{(t-\bar{t})(\bar{t}+z)}{(\bar{t}-z)^3} \right), \quad g_{11}(t, z) = \frac{1+i\rho}{2i} \frac{1}{(t-z)^2},$$

$$g_{21}(t, z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(\bar{t}-z)^2} \right), \quad g_{22}(t, z) = \frac{t-\bar{t}}{(\bar{t}-z)^3}. \quad (3b)$$

Należy przypomnieć, że na stempel działa moment, który zapobiega jego obrotowi (odchyleniu od pionu). Obecnie przeanalizowany zostanie pewien przypadek szczególny, kiedy kształt podstawy stempla jest paraboliczny, zaś szczelina ma charakter powierzchniowy (brzegowy) i wnika w powierzchnię półprzestrzeni w pewnej odległości  $b$  od osi stempla (rys. 1). W związku z powyższym funkcja  $f(x)$  w równaniu (1) przyjmie postać  $f(x) = x^2/(2R)$ , gdzie  $R$  jest parametrem paraboli.



Rys. 1. Schemat analizowanego zagadnienia

Wprowadźmy parametryczny zapis konturu szczeliny  $L$  i strefy kontaktu stempla z powierzchnią półprzestrzeni  $L_0$ :

$$t = a\xi, \quad x = a\eta, \quad (t, x \in L_0); \quad t = a\omega(\xi), \quad t' = a\omega(\eta) \quad (t, t' \in L), \quad -1 < \xi, \eta < 1, \quad (3)$$

$$\omega(\xi) = -b^* - \frac{l^*}{2}(\xi + 1)e^{i\varphi}, \quad b^* = \frac{b}{a}, \quad l^* = \frac{l}{a}.$$

Przechodząc do bezwymiarowych zmiennych i funkcji:

$$\sigma(a\eta) = \sigma(\eta), \quad g'(a\omega(\xi))\omega'(\xi) = g'(\xi), \quad p(a\omega(\xi)) = p(\eta), \quad 4G(\kappa + 1)^{-1} f'(a\eta) = F(\eta),$$

$$aK_1(a\omega(\xi), a\eta) = K_1(\xi, \eta), \quad aL_1(a\omega(\xi), a\eta) = L_1(\xi, \eta), \quad aK_2(a\omega(\xi), a\omega(\eta)) = K_2(\xi, \eta), \quad (4)$$

$$aL_2(a\omega(\xi), a\omega(\eta)) = L_2(\xi, \eta), \quad aM(a\xi, a\omega(\eta)) = M(\xi, \eta).$$

układ równań całkowych (1) z warunkiem równowagi stempla przyjmie postać:

$$\varepsilon\rho\sigma(\eta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi - \eta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-1}^1 [K_1(\xi, \eta)g'(\xi) + L_1(\xi, \eta)\overline{g'(\xi)}]d\xi = F(\eta), \quad |\eta| < 1, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 [K_2(\xi, \eta)g'(\xi) + L_2(\xi, \eta)\overline{g'(\xi)}]d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(\xi, \eta)\sigma(\xi)d\xi = p(\eta), \quad |\eta| < 1,$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(\xi)d\xi = A = \frac{-P}{a}. \quad (6)$$

Rozwiązania układu równań całkowych (5), spełniającego warunek (6), będziemy poszukiwać w klasie funkcji, posiadających osobliwości całkowalne:

$$\begin{aligned} \sigma(\xi) &= w(\xi)q(\xi), & w(\xi) &= (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta, & -1 < \alpha, \beta < 0, \\ g'(\xi) &= (1-\xi^2)^{-1/2} u(\xi), \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie  $q(\xi)$  i  $u(\xi)$  są funkcjami ciągłymi w przedziale obustronnie domkniętym  $[-1, 1]$ , a parametry  $\alpha$  i  $\beta$  pierwiastkami  $\alpha = -0.5 + \mu$ ,  $\beta = -0.5 - \mu$ ,  $\mu = \arctan \varepsilon \rho$  równań charakterystycznych  $\cot \pi \alpha = -\varepsilon \rho$ ,  $\cot \pi \beta = \varepsilon \rho$ . Należy jednocześnie pamiętać, że dla „wychodzącego” na powierzchnię półprzestrzeni końca szczeliny (tj. dla  $\xi = -1$ ) musi być spełniony warunek zerowania się współczynników intensywności naprężeń ( $u(-1) = 0$ ).

### 3. ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE UKŁADU RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

W celu numerycznego rozwiązania układu równań (5)÷(6) zastosowano metodę kwadratur (czy też kwadratur mechanicznych) [12] z wykorzystaniem węzłów Gaussa-Chebysheva, w wyniku czego otrzymano układ liniowych równań algebraicznych w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{mk} q(\xi_k) + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \left[ b_{1mk} u(\tilde{\xi}_k) + c_{1mk} \overline{u(\tilde{\xi}_k)} \right] &= F(\eta_m), \quad m = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{k=1}^{\tilde{n}} \left[ b_{2mk} u(\tilde{\xi}_k) + c_{2mk} \overline{u(\tilde{\xi}_k)} \right] + \sum_{k=1}^n d_{mk} q(\xi_k) &= p(\tilde{\eta}_m), \quad m = 1, \dots, \tilde{n}-1, \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} q(\xi_k) = A, & \quad \sum_{k=1}^{\tilde{n}} (-1)^k \sqrt{\frac{1-\tilde{\xi}_k}{1+\tilde{\xi}_k}} u(\tilde{\xi}_k) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\xi_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad \eta_m = \cos \frac{\pi m}{n}, \quad \tilde{\xi}_k = \cos \frac{2k-1}{2\tilde{n}} \pi, \quad \tilde{\eta}_m = \cos \frac{\pi m}{\tilde{n}},$$

Wielkościami poszukiwanymi są tu funkcje  $q(\xi)$  oraz  $u(\xi)$  odpowiednio w węzłach  $\xi_k$  i  $\tilde{\xi}_k$ . Współczynniki przy niewiadomych w układzie równań (8) dane są wzorami:

$$a_{nk} = \frac{\pi}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[ w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0}{1-\xi_k} + (-1)^{k+n} \frac{R_0}{1+\xi_k} \right], \quad R_0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\beta}{\sin \pi \beta} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right]$$

$$\begin{aligned} a_{mk} &= -\frac{1}{n} (-1)^k \sqrt{1-\xi_k^2} \left\{ \frac{X_0}{1-\eta_m} \left[ \frac{1}{1-\xi_k} - \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_0}{1+\eta_m} \left[ \frac{(-1)^n}{1+\xi_k} + \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + X_3(\eta_m) + X_4(\eta_m) \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right\}, \end{aligned}$$

$$b_{1mk} = \frac{1}{\tilde{n}} K_1(\tilde{\xi}_k, \eta_m), \quad b_{2mk} = \frac{1}{\tilde{n}} K_2(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_m), \quad c_{1mk} = \frac{1}{\tilde{n}} L_1(\tilde{\xi}_k, \eta_m), \quad c_{2mk} = \frac{1}{\tilde{n}} L_2(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_m),$$

$$d_{mk} = \frac{1}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[ M(\xi_k, \tilde{\eta}_m) w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0 M(1, \tilde{\eta}_m)}{1-\xi_k} + (-1)^{n+k} \frac{R_0 M(-1, \tilde{\eta}_m)}{1+\xi_k} \right],$$

$$X_0 = \frac{1}{2} \left[ \frac{2\alpha}{\sin \pi\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right], \quad X(x) = \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^\alpha, \quad (9)$$

$$X_1(x) = \frac{1}{2} \left[ X(x) \cot \pi\alpha - \frac{1}{\sin \pi\alpha} - R(x) \cot \pi\beta + \frac{1}{\sin \pi\beta} \right], \quad R(x) = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^\beta,$$

$$X_3(x) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n w(\xi_r) \sqrt{1-\xi_r^2} F(x, \xi_r, \xi_k), \quad X_4(x) = \varepsilon \rho w(x) + X_1(x),$$

$$F(x, \xi_r, \xi_k) = \begin{cases} \frac{T_n(x)}{(x-\xi_k)(x-\xi_r)}, & x \neq \xi_k, x \neq \xi_r, \xi_k \neq \xi_r \\ -\frac{n(-1)^r}{\sqrt{1-\xi_r^2}(\xi_r-x)} + \frac{T_n(x)}{(\xi_r-x)^2}, & x \neq \xi_k = \xi_r \end{cases}$$

gdzie  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  jest wielomianem Chebysheva pierwszego rodzaju stopnia  $n$ .

Z wykorzystaniem interpolacyjnego wielomianu Lagrange'a dla węzłów  $\xi_k$  znajduje się wartości funkcji  $q(\xi)$  w dowolnym punkcie:

$$q(\xi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k q(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \frac{T_n(x)}{\xi-\xi_k}. \quad (10)$$

W szczególności na końcach przedziału  $[-1, 1]$  otrzyma się :

$$q(\pm 1) = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{\frac{1 \pm \xi_k}{1 \mp \xi_k}} q(\xi_k). \quad (11)$$

W podobny sposób szuka się wartości funkcji  $u(\tilde{\xi})$  w węzłach  $\tilde{\xi}_k$ . Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny  $\tilde{\xi} = -1$  wyznacza się według wzoru (zob. [12]):

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\pi a} \left| \omega'(1) \right| \frac{u(1)}{\omega'(1)}. \quad (12)$$

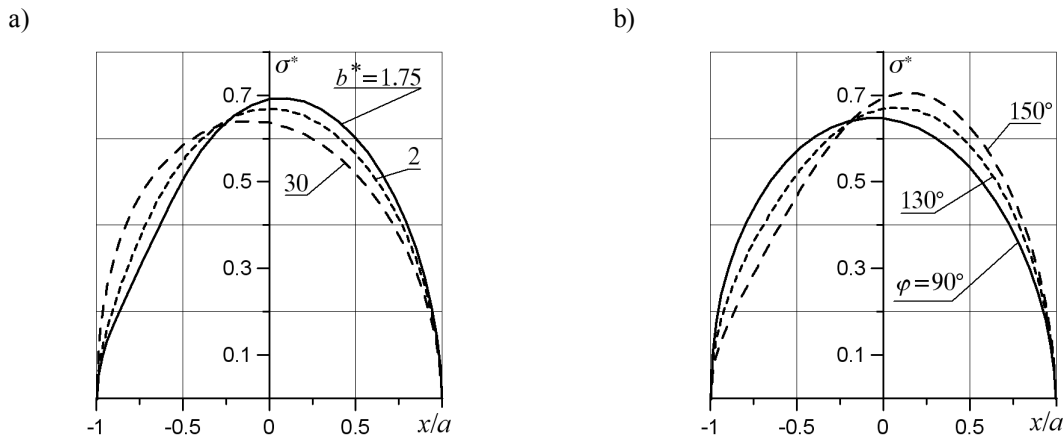
W przypadku stempla o płaskiej podstawie szerokość  $2a$  strefy kontaktu jest znana. Dla stempla parabolicznego, który był przedmiotem badań niniejszej pracy, istnieją dodatkowe warunki:  $q(-1) = q(1) = 0$ , z których wyznacza się połowę szerokości obszaru kontaktu  $a$  oraz odległość  $e$  tego obszaru od początku układu współrzędnych do szczeliny.

Poniżej przedstawiono wybrane wyniki obliczeń numerycznych rozpatrywanego zagadnienia. Należy podkreślić, że wielkości, takie jak współczynniki intensywności naprężeń  $K_I$  i  $K_{II}$ , ciśnienie kontaktowe pod stemplem  $\sigma$ , wymiar strefy kontaktu  $a$  oraz „przesunięcie”  $e$  środka strefy względem osi stempla zostały unormowane zgodnie ze schematem:

$$F_I = \frac{K_I \sqrt{a}}{P}, \quad F_{II} = \frac{K_{II} \sqrt{a}}{P}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma a}{P}, \quad e^* = \frac{e}{a}, \quad a^* = \frac{a}{a_0}, \quad a_0^2 = \frac{2PR}{\pi G} (1-\nu), \quad (13)$$

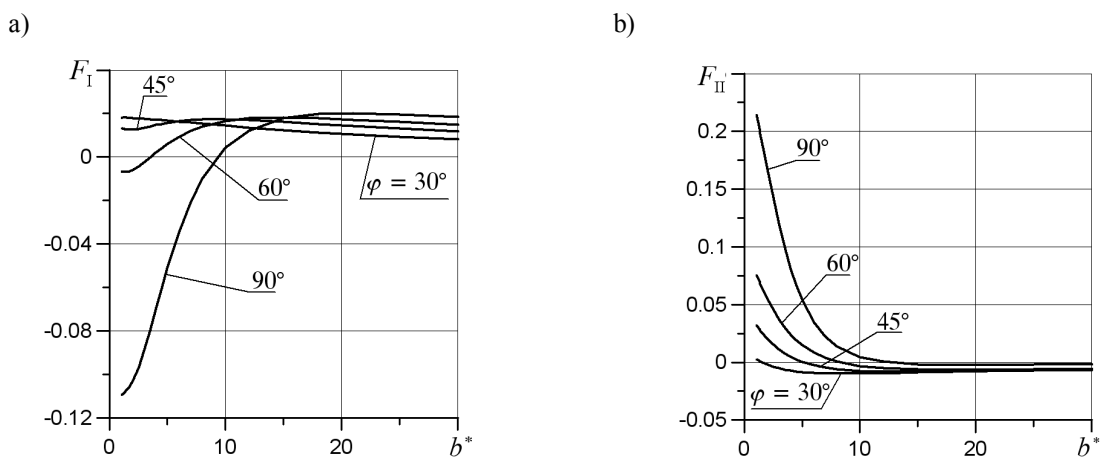
gdzie  $a_0$  jest połową strefy kontaktu w zagadnieniu Hertza – wciskania (bez tarcia) cylindrycznego stempla w powierzchnię półprzestrzeni.

Okazuje się, że zarówno orientacja szczeliny, jak i odległość szczeliny od stępła, mają wpływ na rozkłady ciśnienia kontaktowego pod stępem (rys. 3). Należy tu podkreślić, że wpływ ten jest niewielki i można go zaniedbać dla kątów  $\varphi$  należących do przedziału  $(0^\circ, 90^\circ)$ . Natomiast dla przypadków, kiedy  $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ , wpływ ten jest znaczący. Warto wspomnieć, że współczynnik tarcia (rys. 3) dobrano tak, aby szczelina nie zamykała się i aby nie następował kontakt jej brzegów. Orientacja szczeliny ma też ogromny wpływ na wartości współczynników intensywności naprężeń (rys. 4). W przypadku małych wartości tarcia szczeliny bliskie strefie kontaktu określone kątami około  $90^\circ$  znajdują się w obszarze naprężeń ściskających (rys. 4a). W miarę oddalania się stępła od szczeliny wpływ orientacji szczeliny zanika.



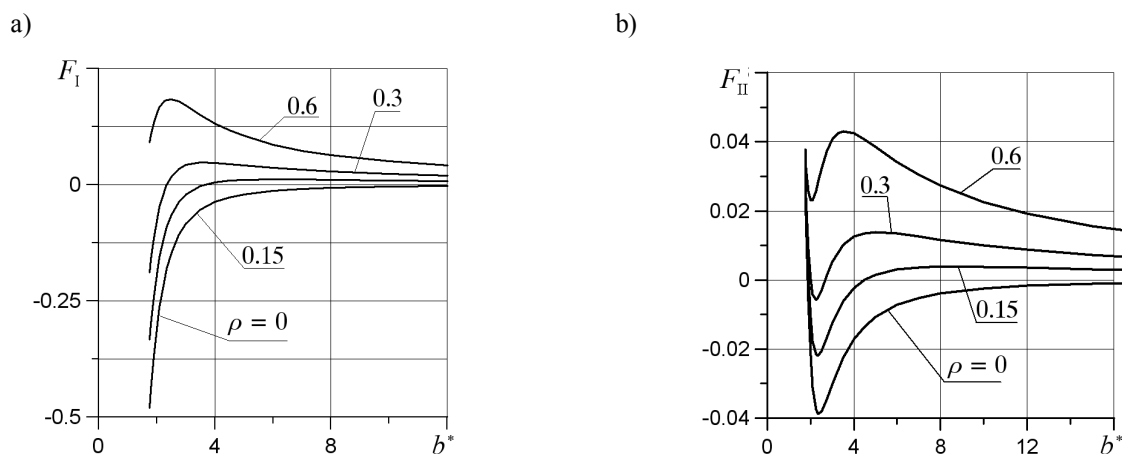
Rys. 3. Rozkłady ciśnienia w strefie kontaktu dla: a) różnych odległości szczeliny od stępła ( $l^* = 1$ ,  $\varphi = 155^\circ$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 0.6$ ), b) różnych orientacji szczeliny ( $b^* = 1.5$ ,  $l^* = 1$ ,  $\rho = 0.75$ ,  $\nu = 0.3$ )

Zaobserwowano również znaczący wpływ współczynnika tarcia na wartości współczynników  $F_I$  i  $F_{II}$  (rys. 5). Wpływ ten jest tym większy, im szczelina położona jest bliżej stępła. Należy zauważyć, że nawet w przypadku braku tarcia również szczeliny „dalekie” mogą znaleźć się w polu naprężeń ściskających (rys. 5a). Wartości wspomnianych współczynników wyraźnie maleją w miarę „oddalania” się szczeliny i zbliżają do poziomu zerowego dla szczelin „dalekich”.

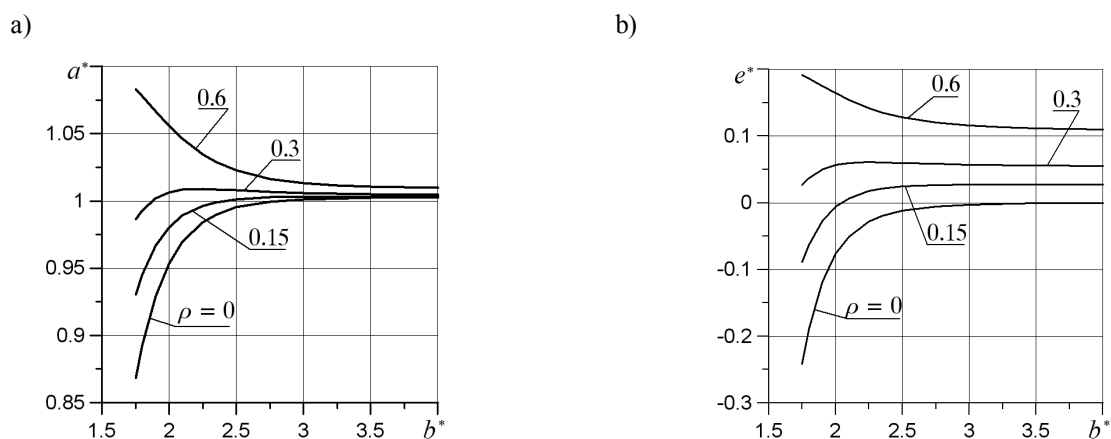


Rys. 4. Wpływ odległości  $b^*$  szczeliny od stępła na wartości współczynników intensywności naprężeń  $F_I$  (a) i  $F_{II}$  (b) dla różnych orientacji szczeliny ( $l^* = 5$ ;  $\rho = 0.3$ )

Współczynnik tarcia ma znaczący wpływ na wielkość strefy kontaktu oraz na „przesunięcie” jej środka, zwłaszcza dla szczelin „bliskich” (rys. 6). Wpływ ten zanika w miarę oddalania się od szczeliny. Należy zwrócić uwagę, że wielkość strefy zwiększa się stopniowo przy mniejszym tarcu, ale zmniejsza przy większym tarcu, aby osiągnąć dla szczelin „dalekich” wymiar zbliżony do wymiaru strefy kontaktu w zagadnieniu Hertza. Podobnie zachowuje się wartość „przesunięcia” środka strefy, przy czym – w zależności od wartości współczynnika tarcia – to „przesunięcie” może nastąpić w przeciwnych kierunkach.



Rys. 5. Wpływ odległości  $b^*$  szczeliny od stempla na wartości współczynników intensywności naprężeń  $F_I$  (a) i  $F_{II}$  (b) dla różnych wartości współczynnika tarcia ( $l^* = 1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\varphi = 135^\circ$ )



Rys. 6. Wpływ odległości  $b^*$  szczeliny od stempla na: a) wielkość strefy kontaktu b) wartość „przesunięcia” środka strefy względem osi stempla dla różnych wartości współczynnika tarcia ( $l^* = 1$ ,  $\varphi = 135^\circ$ ,  $\nu = 0.3$ )

#### 4. PODSUMOWANIE

W pracy wykorzystano metodę osobliwych równań całkowych do określenia wartości współczynników intensywności naprężeń  $K_I$  i  $K_{II}$  oraz ciśnienia kontaktowego w zagadnieniu „przesuwania się” stempla po powierzchni półprzestrzeni sprężystej osłabionej szczeliną brzegową.

Prezentowana metoda daje możliwość jednoczesnego określania zarówno współczynników intensywności naprężeń jak i rozkładów ciśnienia kontaktowego pod stemplem. Takie postępowanie pozwala na uwzględnienie wzajemnego wpływu szczeliny i

stempla. Analiza wyników obliczeń przeprowadzona dla konkretnego przypadku pojedynczej szczeliny krawędziowej pozwala stwierdzić, że wartości współczynników  $F_I$  i  $F_{II}$  wyraźnie zależą od współczynnika tarcia. Zależność ta zaznacza się szczególnie dla szczelin położonych blisko strefy kontaktu. Zaobserwowano również znaczący wpływ orientacji szczeliny na wartości współczynników intensywności naprężeń oraz odległości szczeliny od osi stempla na rozkład ciśnienia kontaktowego. Wpływ ten zaznacza się szczególnie wyraźnie dla kątów  $\varphi$  należących do przedziału ( $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ).

## LITERATURA

1. Muskhelishvili N.I.: Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1962 (in Russian).
2. Goshima T., Kamishima Y.: Mutual interference of two surface cracks in semi-infinite body due to rolling contact with frictional heating by a rigid roller. "Int. J. JSME" Ser. A, 39, 1, 1996, p. 26-33.
3. Goshima T.: Thermomechanical effects on crack propagation in rolling contact fatigue failure. "Journal of Thermal Stresses" 26, 2003, p. 615-639.
4. Goshima T., Soda T.: Stress intensity factors of a subsurface crack in a semi-infinite body due to rolling/sliding contact and heat generation. "Int. J. JSME" Ser. A, 40, 3, 1997, p. 263-270.
5. Okumura M., Hasebe N., Nakamura T.: Crack due to weld shaped punch with friction. ASCE, "J. Eng. Mech.", 116, 1990, p. 2173-2185.
6. Hasebe N., Qian J.: Circular rigid punch with one smooth and another sharp ends on a half-plane with edge crack. "Journal of Applied Mechanics" 64, 1997, p. 73-79.
7. Hasebe N., Qian J.: Edge crack due to circular rigid punch in incomplete contact, "Mechanics of Materials" 28, 1998, p. 271-279.
8. Panasyuk V.V., Datsyshyn O.P., Marchenko H.P.: Stress state of a half-plane with cracks under rigid punch action. "International Journal of Fracture" 101, 2000, p.347-363.
9. Datsyshyn O.P., Panasyuk V.V., Pryshlak R.E., Terlets'kyi A.B.: Paths of edge cracks in rolling bodies under the conditions of boundary lubrication. "Materials Science" 37, 3, 2001, p. 363-373.
10. Savruk M., Yevtushenko A.: Płaskie zagadnienie kontaktowe dla półprzestrzeni ze szczelinami z uwzględnieniem tarcia w strefie kontaktu. W: Materiały III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji. Białystok 2005, s. 357-360.
11. Savruk M., Tomczyk A., Yevtushenko A.: Płaskie kontaktowe zagadnienie z uwzględnieniem tarcia dla półprzestrzeni ze szczeliną. „Acta Mech. Autom.” 1, 2, 2007, s. 41-44.
12. Savruk M.P.: Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka, 1981 (in Russian).

## PARABOLIC PUNCH PROBLEM ON A SEMI-INFINITE PLANE WITH AN OBLIQUE EDGE CRACK

Summary. This work makes use of a singular integral equations method to solve a plane contact problem where a parabolic punch is acting on a surface of an elastic half-space weakened by a single edge crack. Used method gives possibility for simultaneously calculating the contact pressure and the values of stress intensity factors  $K_I$  and  $K_{II}$  ahead of the crack tip. The effect of crack length, the distance between crack and punch, the crack orientation and also the friction coefficient on contact pressure distribution and values of the stress intensity factors were analyzed in detail.