

## MODELOWANIE OBCIĄŻEŃ MECHANICZNYCH KÓŁ ZĘBATYCH O NIETYPOWYCH ZARYSACH Z ZASTOSOWANIEM MES

TADEUSZ MARKOWSKI, GRZEGORZ BUDZIK, JACEK PACANA, MARIUSZ SOBOLAK

*Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska*

*e-mail: tmarkow@prz.edu.pl, gbudzik@prz.edu.pl, pacanaj@prz.edu.pl, msobolak@prz.edu.pl*

**Streszczenie.** Przedstawiono proces modelowania obciążeń mechanicznych kół zębatach o nietypowych – nieewolwentowych zarysach z zastosowaniem metody elementów skończonych. Celem przeprowadzonych badań było określenie wartości obciążeń par kół zębatach o przelozieniu 3,94, przeznaczonych do zastosowania w urządzeniach gospodarstwa domowego. Obliczenia przeprowadzono dla kół wykonanych z tworzywa ABS. Obliczenia wytrzymałościowe z zastosowaniem MES przeprowadzono dla modeli walcowych kół zębatach o zarysach zębów specjalnie opracowanych dla tworzyw polimerowych.

### 1. WSTĘP

Wyznaczanie obciążeń mechanicznych kół zębatach jest zagadnieniem złożonym, lecz dzięki zastosowaniu metody elementów skończonych proces ten można znacząco usprawnić. Obliczenia numeryczne z zastosowaniem MES pozwalają na dużą dowolność analizowanych konstrukcji mechanicznych pod względem geometrycznym, jak też i zastosowanych materiałów. W ramach niniejszego opracowania przeprowadzono obliczenia dla kół wykonanych z tworzywa ABS przeznaczonych do zastosowania w urządzeniach gospodarstwa domowego. Otrzymane, w ramach obliczeń numerycznych, wyniki pozwalają na określenie rozkładu i wartości naprężeń dla kół zębatach o różnych zarysach zębów oraz prześledzić charakter obciążenia kół zębatach. Obliczenia wytrzymałościowe dotyczyły modeli kół zębatach o ewolwentowym zarysie zęba, które zestawiono z innymi o nietypowych zarysach zębów. Analizę numeryczną przeprowadzono dla konstrukcji walcowych kół zębatach specjalnie opracowanych dla tworzyw polimerowych.

Metodę elementów skończonych wybrano ze względu na możliwość automatycznego przeprowadzania dużej liczby analiz różniących się pojedynczymi parametrami [6, 9, 12].

### 2. MODEL OBLICZENIOWY

Przy kołach zębatach walcowych o zębach prostych możliwe było uproszczenie obliczeń przez sprowadzenie ich do zagadnienia dwuwymiarowego, w którym modelem obliczeniowym jest przekrój poprzeczny koła zębatego, prostopadły do jego osi, utworzony na środku szerokości wieńca zębatego [1,10]. Do obliczeń przyjęto następujące założenia:

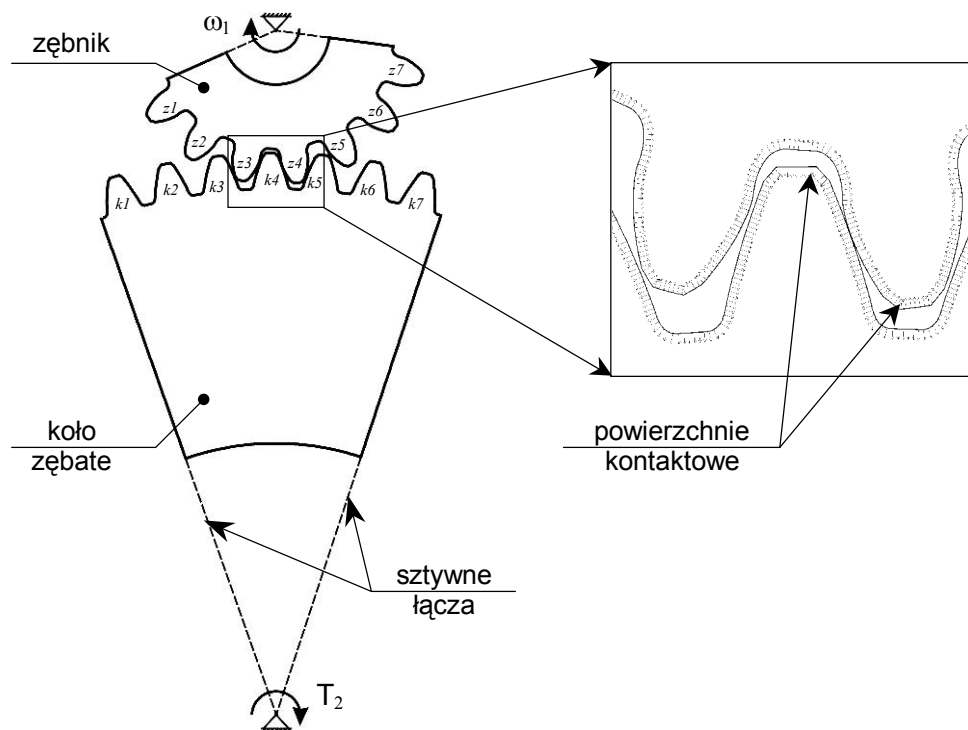
szerokość kół zębatach jest mała w stosunku do ich średnicy, zadane obciążenia zewnętrzne kół zębatach rozkładają się równomiernie na całej ich szerokości i działają jedynie w płaszczyźnie wydzielonego przekroju. Przyjęte założenia i procedury pozwalają z wystarczającą dużą dokładnością przeprowadzić obliczenia wielu kół zębatach różniących się między sobą jedynie zarysami zębów.

Obliczenia wytrzymałościowe z zastosowaniem MES przeprowadzono dla modeli kół zębatach o następujących zarysach zębów: ewolwentowym, sinusoidalnym, krzywoliniowo-ewolwentopochodnym i wklęsło-wypukłym. Wszystkie zarysy, poza wklęsło-wypukłym, występowały w obliczeniach w trzech wariantach różniących się parametrami zarysu, stąd wynika, że analizę przeprowadzono dla dziesięciu różnych par kół. Obliczenia przeprowadzono dla kół wykonanych z tworzywa ABS, którego podstawowe właściwości materiałowe wynoszą: moduł Younga 2400[MPa], granica plastyczności 90[MPa], liczba Poissona 0,4. Obliczenia dotyczące wszystkich modeli przeprowadzono z zachowaniem tych samych warunków utwierdzenia i obciążenia dla każdego z modeli.

Obliczenia wytrzymałościowe MES przeprowadzono w programie ADINA z wykorzystaniem modeli 2D opracowanych wcześniej w programie Autodesk Mechanical Desktop 2009. Modele powierzchniowe kół zębatach przygotowano z pomocą autorskiego programu działającego na zasadzie komputerowej symulacji obróbki wieńca zębatego narzędziem zębatkowym. Wszystkie z użytych w obliczeniach modeli posiadały taką samą budowę, a różnice dotyczyły jedynie zastosowanego w konkretnym wariantcie obliczeń zarysu zęba. Przykładowy widok modelu obliczeniowego koła zębatego przygotowanego do obliczeń MES pokazany został na rys. 1.

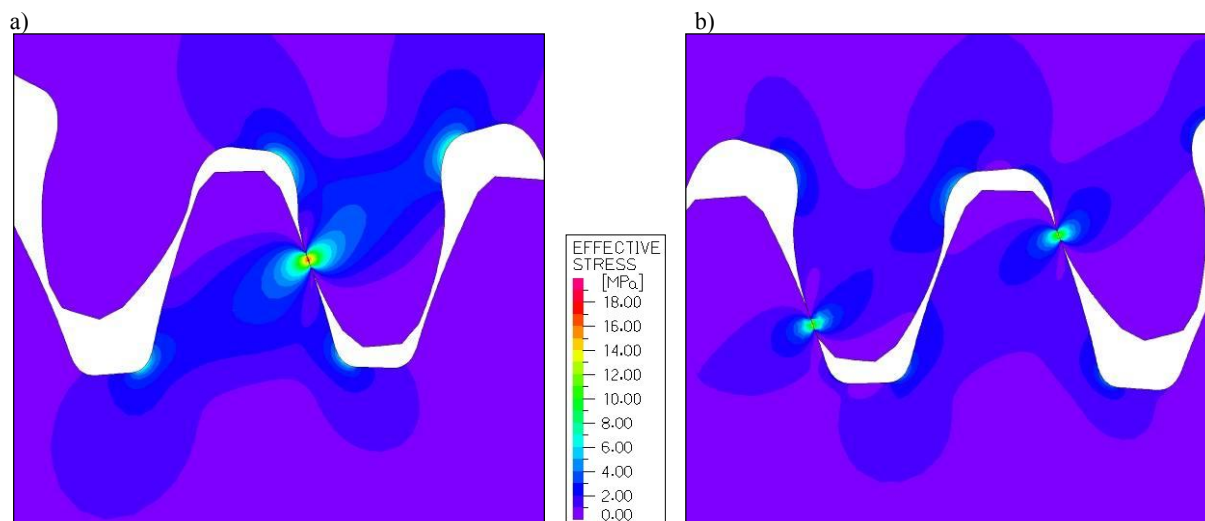
Zamodelowane koła mogły się jedynie obracać względem swoich własnych osi symetrii, leżących w odległości 63mm. Powiązanie modeli z ich środkami obrotu zostało zrealizowane za pomocą sztywnych łączy (Rigid Links), a dodatkowo w modelu zębatach określono wymuszenie obrotu wokół własnej osi o kąt 1,65rad. Pozwoliło to na prześledzenie współpracy sześciu par zębów dla każdej pary kół. Modele częściowe, obejmujące po 7 zębów, pozwoliły znacznie ograniczyć liczbę elementów skończonych koniecznych do przeprowadzenia dyskretyzacji. Obciążenie przekładni zrealizowano, definiując w osi modelu koła zębatego moment skręcający o wartości  $T_2=4\text{Nm}$ . Taką stosunkowo niską wartość momentu przyjęto ze względu na fakt, że badano głównie koła zębatach wykonane z tworzyw sztucznych. Dzięki zastosowaniu na powierzchniach bocznych zębów powierzchni kontaktowych możliwe było zasymulowanie współpracy modeli, a więc przekazywanie zadanego obciążenia. Tak przygotowane koła zębatach w połączeniu z zastosowanymi łączy sztywnymi pozwalają uzyskać wymaganą sztywności modeli i poprawnie określić naprężenia w zębie na całym odcinku przyporu [7, 5].

Utworzony model płaski poddany został dyskretyzacji za pomocą ośmiowęzłowych elementów czworokątnych. Najdokładniejszy podział zdefiniowano na powierzchniach bocznych i u podstawy zęba ze względu na przewidywane wysokie wartości naprężeń w tych obszarach. W pozostałej części modelu ustalono znacznie mniej gęstą siatkę, jedynie w celu przeniesienia obciążeń [2, 4].



Rys. 1 Model obliczeniowy przekładni

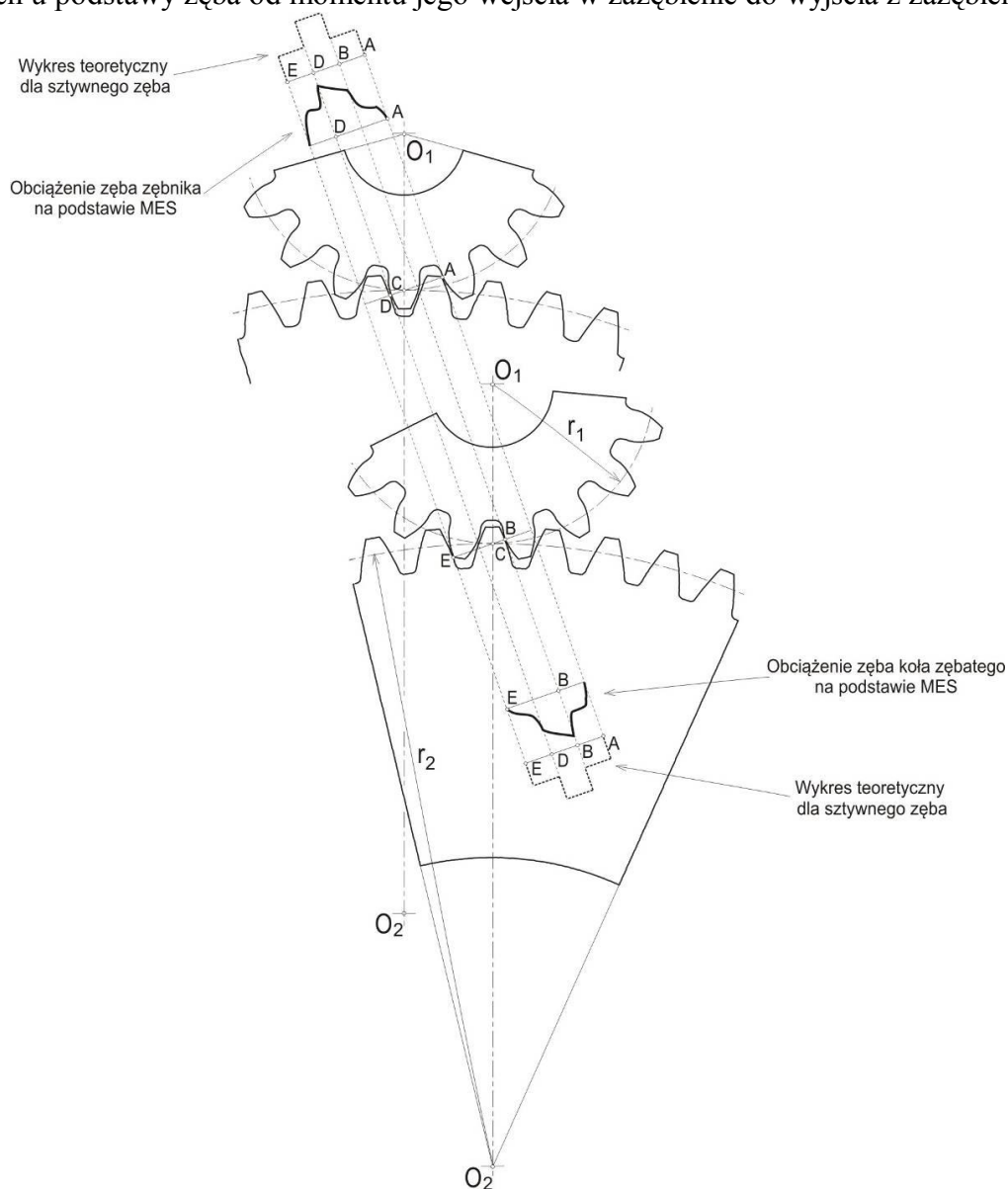
Otrzymano rozwiązania dla wszystkich 10 przygotowanych modeli obliczeniowych. Rozkłady naprężeń we wszystkich analizowanych zarysach zębów w obszarze zazębienia ukazały charakterystyczne ich ułożenie powtarzające się we wszystkich analizowanych modelach (rys. 2). Najwyższe wartości naprężeń stykowych występują w miejscu kontaktu zębów obydwu kół, a także u podstawy zęba. Obszary podwyższonych naprężeń zginających u podstawy zęba występują po stronie przeciwnej do jego obciążenia. Taki rozkład naprężeń znany jest z literatury [3], a wartości maksymalne naprężeń można analitycznie wyznaczyć na podstawie normy PN-ISO 6336 [8].



Rys. 2. Rozkład naprężeń zredukowanych [MPa], w kołach o zarysie ewolwentowym 20° zęba, w przyporze: a) jednoparowym, b) dwuparowym

Utworzono wykresy naprężeń zginających występujących u podstawy zęba w miejscu, gdzie występowały ich najwyższe wartości. Przyspieszyło to znacznie obróbkę wyników, gdyż pozwoliło uniknąć konieczności długotrwałego wczytywania prezentacji graficznej wyników dla kolejnych kroków czasowych oraz znacznie poprawiło dokładność odczytywanych wyników.

Sposób tworzenia wykresów obciążenia pojedynczego zęba dla koła zębatego i zębniaka zaprezentowany został na rys 3. Wykresy przedstawiają w sposób graficzny zmianę wartości naprężeń u podstawy zęba od momentu jego wejścia w zazębienie do wyjścia z zazębienia.

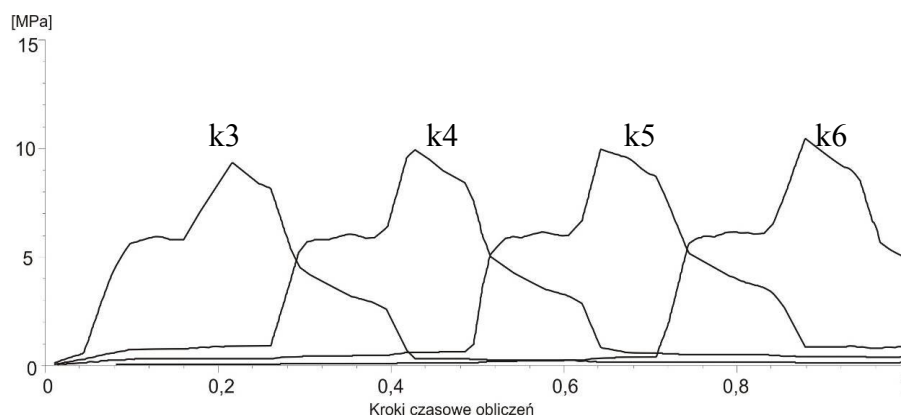


Rys. 3. Rozkład obciążenia zębów koła zębatego i zębniaka na odcinku przyporu  
 $O_{1,2}$  – osie obrotu, A - początek odcinka przyporu, B - wewnętrzny punkt  
 jednoparowego przyporu, C – biegun zazębienia, D - zewnętrzny punkt jednoparowego  
 przyporu, E - koniec odcinka przyporu,

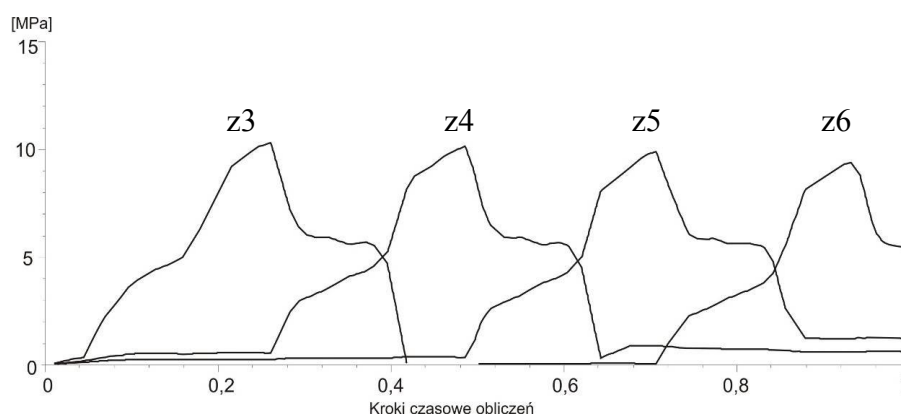
W trakcie tej współpracy wyróżnić można trzy fazy: zazębienie dwuparowe pomiędzy punktami A i B, zazębienie jednoparowe pomiędzy punktami B i D oraz ponownie zazębienie dwuparowe pomiędzy punktami D i E. Na wykresach zaprezentowanych na rys. 3 opisane wcześniej fazy współpracy rozdzielone zostały liniami przerywanymi oraz oznaczone

punktami charakterystycznymi. Wykresy obciążenia zęba utworzone na podstawie obliczeń MES zostały zestawione z wykresami teoretycznymi dla zębów idealnie sztywnych (linia kreskowa). Wykresy teoretyczne mają regularny kształt, ponieważ nie uwzględniają odkształcenia zęba przez zginanie i ściskanie oraz spłaszczenia w miejscu zetknięcia się bocznych powierzchni współpracujących zębów [3, 11]. Wykresy uzyskane na podstawie obliczeń MES mają bardziej nieregularny przebieg, gdyż uwzględniają oprócz skomplikowanych warunków współpracy także pewne niedokładności podziałki i zarysu, ponieważ modele do obliczeń uzyskano w wyniku symulacji obróbki.

W celu określenia w czytelny sposób charakteru obciążenia kół wykonano wykresy naprężeń od zginania u podstawy dla kilku kolejnych zębów w ząbieniu. Przykłady takich wykresów dla koła zębatego i zębniaka o kołowo-łukowym zarysie zębów przedstawiono na rys. 4 i 5. Dzięki zestawieniu wykresów dotyczących kolejnych zębów na jednym wykresie i jednoznacznemu ich ustaleniu w czasie można określić charakter pracy i przebieg obciążenia dla całej przekładni. Na wykresach tych można prześledzić wzajemne położenie obszarów współpracy jednoparowej i dwuparowej kolejnych par zębów pozostających w ząbieniu.

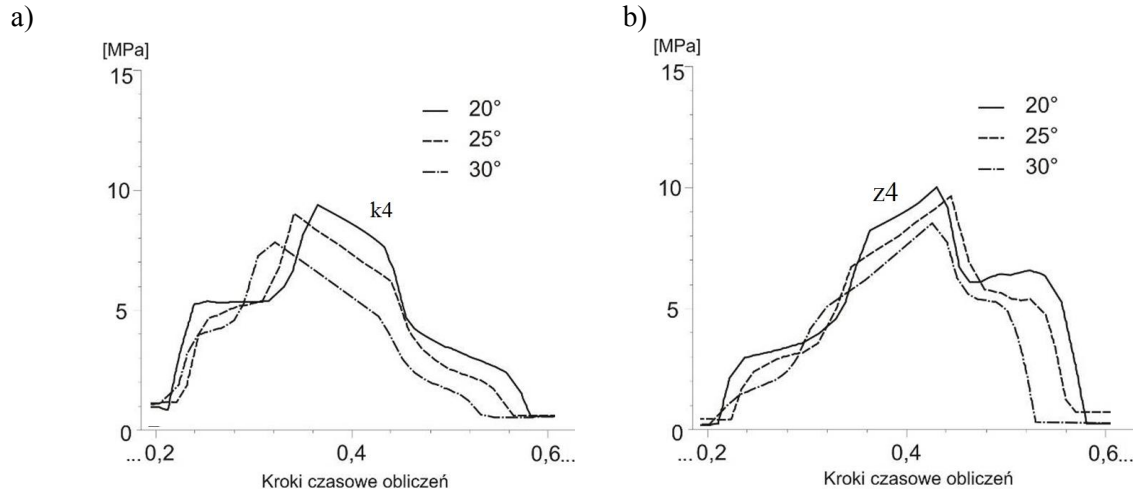


Rys. 4. Naprężenia od zginania u podstawy zęba koła zębatego o zarysie kołowo-łukowym



Rys. 5. Naprężenia od zginania zębniaka u podstawy zęba o zarysie kołowo-łukowym

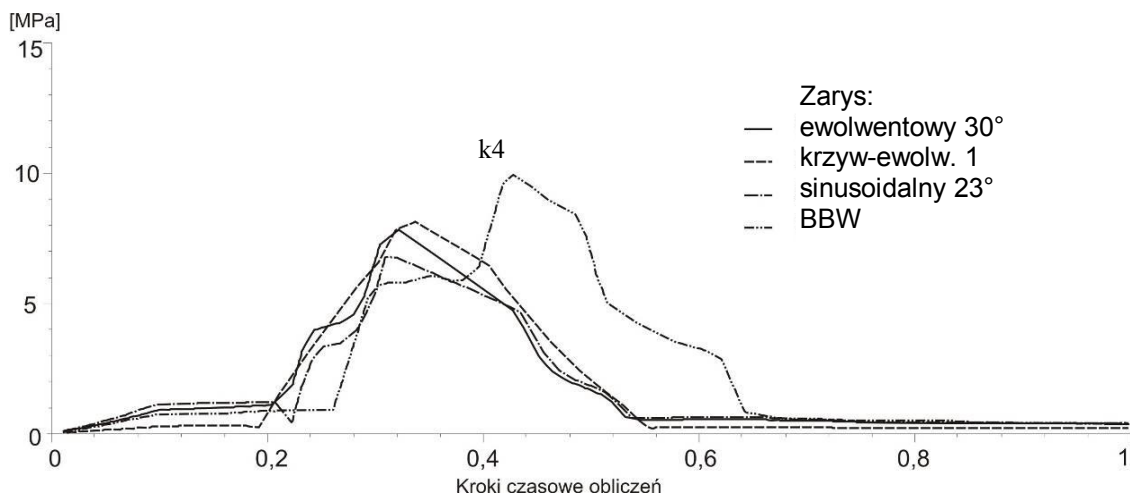
Wyniki obliczeń zestawiono w wykresy dotyczące jednego zęba przy kolejnych analizowanych zarysach. Przykładowe wykresy przedstawiające wartości naprężeń u podstawy czwartego zęba, dla modeli kół zębatych o zarysie ewolwentowym, o różnej wartości kąta zarysu  $\alpha$  przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Naprężenia od zginania u podstawy zęba o różnych zarysach ewolwentowych:  
a) koło zębate, b) ząb

Najniższe wartości naprężeń zginających występują w przypadku zarysu ewolwentowego o kącie 30°, a najwyższe dla zębów o kącie zarysu 20°. Różnice te spowodowane są bezpośrednio kształtem zęba, a szczególnie jego szerokością u podstawy. Przy wszystkich trzech zarysach, rozpatrywany czwarty ząb rozpoczyna współpracę w tym samym czasie (w tym samym kroku czasowym obliczeń), jednak zarówno całkowity czas współpracy, jak też długości poszczególnych faz współpracy (jedno i dwuparowej) są różne dla każdego z nich.

Na rys. 7 zestawiono wykresy naprężeń zredukowanych przy czterech wybranych modelach zarysów. Z trzech grup zarysów, ewolwentowych, krzywoliniowo-ewolwentopochodnych oraz sinusoidalnych, wybrano po jednym, przy którym otrzymano najniższe wartości naprężeń i zestawiono je z zarysem BBW dla tego samego zęba.



Rys. 7. Naprężenia od zginania u podstawy jednego zęba koła o różnych zarysach

Różnice w kształcie wykresów jak i też w poziomie wartości naprężeń maksymalnych przy trzech pierwszych zarysach są nieznaczne. Jedynie zarys BBW znacznie odbiega od pozostałych. Maksymalne wartości naprężeń zginających przy zarysie BBW zęba są o około 20% wyższe od pozostałych. Rozpatrywany ząb w przypadku tego zarysu później rozpoczyna współpracę z zębem zębniaka oraz znacznie dłużej pozostaje w zazębieniu.

### 3. PODSUMOWANIE

Przeprowadzona analiza jakościowa różnych zarysów zębów dotyczyła określenia wartości naprężeń wywołanych zginaniem u podstawy zęba dla kół o różnych parametrach wieńca zębatego. Obliczenia dotyczyły kół zębatych o następujących zarysach zębów: ewolwentowym, krzywoliniowo-ewolwentopochodnym, sinusoidalnym oraz kołowo-łukowym. Przy wszystkich analizowanych zarysach przyjęto do obliczeń te same warunki brzegowe, obciążenia oraz parametry materiałowe. Wykresy naprężeń u podstawy zęba wywołanych zginaniem przy wszystkich badanych zarysach zębów mają charakterystyczny przebieg, inny dla koła zębatego i zębniaka. Różnica wynika z odmiennego charakteru współpracy zębów koła zębatego i zębniaka, co przedstawione zostało na rys. 3. Ząb koła zębatego rozpoczyna współpracę z zębem zębniaka od swojego wierzchołka, a punkt styku powierzchni bocznych zębów pozostających w zazębieniu przesuwają się w kierunku średnicy stóp koła. W przypadku zęba zębniaka współpraca zaczyna się u jego podstawy i kończy na wierzchołku zęba. Dzięki utworzonym wykresom można wyraźnie zaobserwować trzy fazy obciążenia pojedynczego zęba dla każdego z modeli.

Najbardziej znaczące różnice na zaprezentowanych wykresach wystąpiły w środkowej fazie zazębienia, gdy występowała współpraca jednoparowa. Rozbieżności dotyczyły zarówno wartości naprężeń występujących u podstawy zęba jak również czasu trwania współpracy jednej pary zębów. W fazie tej, dla każdego z rozpatrywanych zarysów zębów, wystąpiły najwyższe wartości naprężeń zginających, lecz ich maksymalne wartości nie różniły się więcej niż o 20% dla poszczególnych modeli obliczeniowych. Znacznie bardziej, bo w niektórych przypadkach o 100%, różniły się długości odcinka jednoparowego przyporu dla poszczególnych zarysów, a duże różnice występowały nawet w przypadku tego samego zarysu podstawowego (np. zarys sinusoidalny).

Porównano wartości naprężeń dla każdej z trzech grup zarysów podstawowych i wybrano z każdej z nich po jednym, który posiadał najniższe wartości naprężeń, a następnie te wykresy zestawiono ze sobą. Taką samą procedurę zastosowano zarówno dla wykresów dotyczących zęba koła zębatego jak i zębniaka. Porównanie wykresów naprężeń zginających u podstawy zęba wykazało, że najniższe wartości naprężeń w kole zębatym i zębniaku występują przy zarysie sinusoidalnym o kącie  $23^\circ$ , najwyższe natomiast naprężenia wystąpiły u podstawy zęba o zarysie BBW i nieznacznie przekraczały 10MPa. Wyznaczony poziom wartości maksymalnych naprężeń nie przekracza wartości dopuszczalnych w żadnym z rozpatrywanych modeli obliczeniowych.

Wyniki obliczeń oraz ich zestawienie w postaci wykresów naprężeń potwierdzają odmiennosć nie tylko w konstrukcji, ale także w charakterze pracy kół z poszczególnymi zarysami zębów. Zarówno przebieg obliczeń jak i jakość otrzymanych wyników uzasadniają stosowanie uproszczonych modeli dwuwymiarowych do wyznaczania obciążeń mechanicznych, kół zębatych z zastosowaniem MES.

*Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2010 jako projekt badawczy rozwojowy (N R03 0004 04).*

### LITERATURA

1. Bąk R., Burczyński T.: Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego. Warszawa: WNT, 2001.
2. Budzik G., Pacana J.: Analiza poprawności rozwiązania MES w zależności od rodzaju oraz liczby zastosowanych elementów skończonych. „Acta Mechanica Slovaca” 3-A/2008, PRO-TECH-MA Ročník 12, Kosiče 2008.

3. Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A.: Przekładnie walcowe. T.1. Warszawa: WKŁ, 1992.
4. Kopecki H., Witek L.: Wpływ rodzaju oraz liczby elementów na błąd i zbieżność rozwiązania MES na przykładzie analizy stateczności pręta ściskanego. W: V konferencja naukowo-techniczna, WAT, IPPT PAN, Warszawa-Rynia 2000.
5. Markowski T., Mijał M. Rejman E.: Podstawy konstrukcji maszyn : napędy mechaniczne. Cz. 1. Rzeszów: Oficyna Wyd. Pol. Rzesz., 1999.
6. Osiński J.: Obliczenia wytrzymałościowe elementów maszyn z zastosowaniem metody elementów skończonych. Warszawa: Oficyna Wyd. Pol. Warsz., 1998.
7. Pacana J., Budzik G., Kudasik T.: Wyznaczanie naprężeń zginających w kołach zębatych z zastosowaniem metody elementów skończonych. „Acta Mechanica Slovaca” 3-A/2008, PRO-TECH-MA Ročník 12, Kosiče 2008r.
8. PN-ISO 6336. Przekładnie zębate walcowe. Obliczanie nośności kół.
9. Rakowski G., Kacprzyk Z.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Warszawa : Oficyna Wyd. Pol. Warsz., 2005.
10. Rusiński E., Czmochocki J., Smolnicki T.: Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych. Wrocław: Oficyna Wyd. Pol. Wrocł., 2000.
11. Wiktor J.: Analityczno numeryczne metody analizy parametrów geometrycznych, zakłóceń ruchu i wytrzymałości przekładni walcowych. Rzeszów: Oficyna Wyd. Pol. Rzesz., 2004.
12. Zagrajek T., Krześciński G., Marek P.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Warszawa: Oficyna Wyd. Pol. Warsz., 2005.

## **MODELING OF NON-INVOLUTE GEARS MECHANICAL LOADS WITH THE APPLICATION OF FEM**

Summary. The article presents the process of modeling mechanical loads for gears of untypical, non-involute outlines with the use of the finite element method. The aim of the conducted tests was to determine the value of loads of gear pairs having a gear ratio of 3,94, designed for use in household appliances. Calculations were performed for gears made of the ABS polymer. Strength calculations with the use of FEM were made for cylindrical gear models with a tooth outline specially designed for polymeric materials.