

KRYTERIA DOBORU MODELU NUMERYCZNEGO DO OBLICZEŃ WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH WALCOWEJ PRZEKŁADNI ZĘBATEJ METODĄ MES

TADEUSZ MARKOWSKI, GRZEGORZ BUDZIK, JACEK PACANA

*Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska
e-mail: tmarkow@prz.edu.pl, gbudzik@prz.edu.pl, pacanaj@prz.edu.pl*

Streszczenie. Artykuł przedstawia strategię ustalania kryteriów doboru modelu numerycznego do obliczeń wytrzymałościowych walcowej przekładni zębatej metodą MES. Rozważania dotyczą kół zębatych walcowych o zębach prostych, dlatego też możliwe było uproszczenie obliczeń przez, sprowadzenie ich do zagadnienia dwuwymiarowego. Dzięki takiemu uproszczeniu geometrii analizowane zagadnienie można zdefiniować jako płaski stan naprężenia, w którym modelem obliczeniowym jest przekrój poprzeczny koła zębatego, prostopadły do jego osi, utworzony na środku szerokości wieńca zębatego.

1. WSTĘP

W projektowaniu inżynierskim często zachodzi potrzeba przeprowadzenia obliczeń numerycznych z zastosowaniem metody elementów skończonych MES. Analizy numeryczne przekładni zębatych przeprowadza się zarówno w celu określenia wartości i rozkładu naprężeń w kołach zębatych jak również dla określenia charakteru pracy oraz obciążeń jej głównych elementów. Często obliczenia dotyczą dużej liczby podobnych modeli, różniących się nieznacznie, np. wartością jednego parametru, dlatego też ważne jest takie przygotowanie modeli, aby przy zachowaniu wymaganej dokładności usprawnić proces obliczeń i analizy otrzymanych wyników. Każda z konstrukcji mechanicznych wymaga indywidualnego podejścia i umożliwia zastosowanie innego typu uproszczeń geometrycznych i obliczeniowych. Kryteria doboru modelu numerycznego w przypadku walcowej przekładni zębatej, do obliczeń MES, są czytelne i pozwalają na znaczne uproszczenia. Ponieważ niniejsze rozważania dotyczą kół zębatych walcowych o zębach prostych, dlatego też możliwe było uproszczenie obliczeń przez sprowadzenie ich do zagadnienia dwuwymiarowego. Należy jednak w takim przypadku zwrócić szczególną uwagę na dokładne określenie parametrów materiałowych, geometrycznych oraz warunków brzegowych do obliczeń numerycznych MES. Ocenę poprawności wybranego dwuwymiarowego modelu obliczeniowego dokonano przez porównanie otrzymanych wyników z analogicznymi rezultatami dla trójwymiarowych modeli przestrzennych.

2. MODEL OBLICZENIOWY

Modele obliczeniowe przestrzenne (3D) oraz płaskie (2D) kół zębatach przekładni walcowej wykorzystywane w niniejszych obliczeniach utworzono w programie Autodesk Mechanical Desktop 2009. Wysoką dokładność uzębienia uzyskano dzięki zastosowaniu przy ich modelowaniu autorskiego programu opartego na zasadzie komputerowej symulacji obróbki narzędziem zębatkowym. Utworzone modele przestrzenne kół posłużyły bezpośrednio do obliczeń numerycznych, a także do zdefiniowania na ich podstawie modeli dwuwymiarowych. Przygotowane modele trójwymiarowe i dwuwymiarowe kół zębatach zaimportowano w postaci plików *.IGS do preprocesora programu ADINA, w którym przeprowadzono obliczenia numeryczne z użyciem metody MES.

W obydwu przypadkach obliczenia wytrzymałościowe z zastosowaniem MES przeprowadzono dla modeli kół o ewolwentowym zarysie zębów. Obliczenia przeprowadzono dla kół wykonanych ze stali, obciążonych momentem $T_2=400\text{Nm}$, rozłożonym równomiernie na szerokości koła wynoszącej $b=20\text{mm}$. Obliczenia dotyczące zarówno modeli 2D jak i 3D kół zębatach przekładni walcowej przeprowadzono przy założeniu odpowiedniego odwzorowania rzeczywistych warunków utwierdzenia i obciążenia przekładni. Przyjęto, że koła mogą się jedynie obracać względem swoich własnych osi, a powiązanie modeli z ich środkami obrotu zostało zrealizowane za pomocą sztywnych łączy (Rigid Links). Dla modelu zębatach określono wymuszenie obrotu wokół własnej osi o kąt $1,65[\text{rad}]$, by prześledzić współpracę kilku kolejnych par zębów. Obciążenie momentem skręcającym T_2 zostało przypisane do modelu koła zębatach. Na powierzchniach bocznych zębów zdefiniowano powierzchniowe kontaktowe, bez uwzględniania zjawiska tarcia, dzięki czemu możliwe było symulowanie współpracy kół przekładni. Tak przygotowane modele w połączeniu z zastosowanymi łączy Rigid Links pozwalają uzyskać wymaganą sztywności modeli i poprawnie określić naprężenia w kołach zębatach [2, 10].

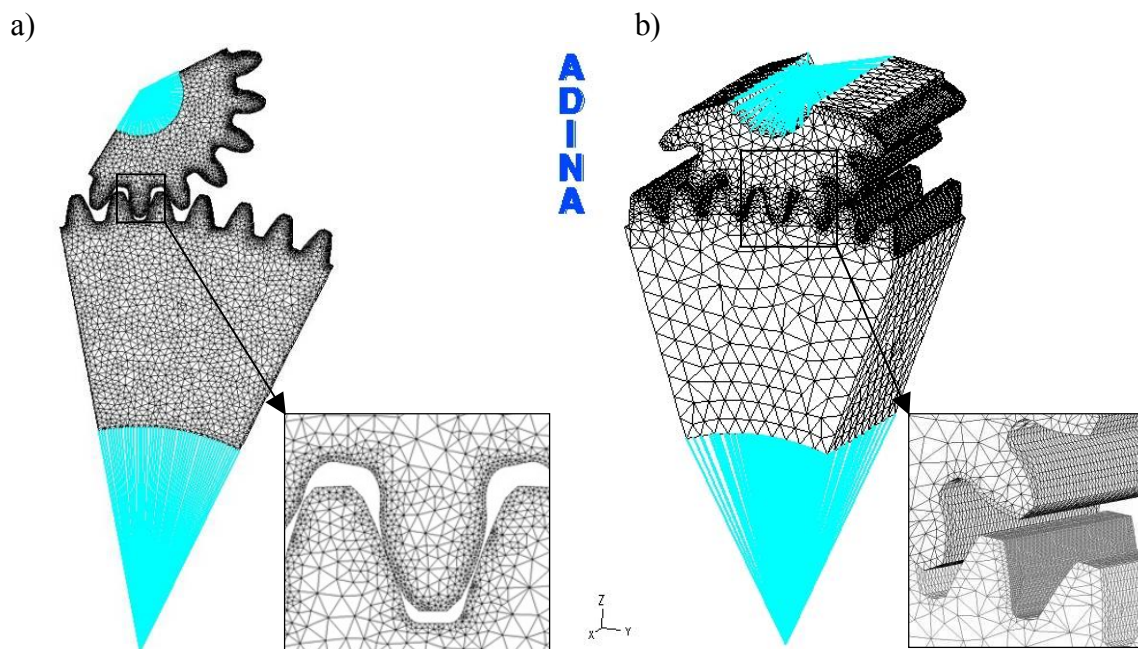
Dodatkowo przyjęto do obliczeń numerycznych z zastosowaniem modeli przestrzennych jedynie ich wycinki obejmujące po 7 zębów koła zębatach i zębatach. Takie ograniczenie modeli pozwala zmniejszyć liczbę użytych elementów skończonych, a przez to skrócić czas obliczeń i uprościć obróbkę wyników.

Także w przypadku obliczeń dwuwymiarowych dotyczących kół zębatach walcowych o zębach prostych, możliwe jest uproszczenie analizy numerycznej polegające na sprowadzeniu modeli przestrzennych do zagadnienia dwuwymiarowego, określonego jako płaski stan naprężenia [1, 9]. W takim przypadku model obliczeniowy zdefiniowano jako przekrój poprzeczny koła zębatach, prostopadły do jego osi, utworzony na środku szerokości wieńca zębatach.

Ponadto do dwuwymiarowych obliczeń numerycznych MES przyjęto następujące założenia: szerokość kół zębatach jest mała w stosunku do jego średnicy, zadane obciążenia zewnętrzne kół zębatach rozkładają się równomiernie na całej ich szerokości i działają jedynie w płaszczyźnie wydzielonego przekroju.

Utworzone modele płaskie poddane zostały w preprocesorze programu ADINA dyskretyzacji przy pomocy sześciowzłowych elementów trójkątnych. Na modelach przestrzennych zdefiniowano siatkę za pomocą dziesięciowzłowych czworobocznych elementów skończonych.

Modele dyskretne kół zębatach, z utworzoną siatką elementów skończonych przedstawione zostały na rys. 1.



Rys. 1. Modele obliczeniowe kół zębatych poddane procesowi dyskretyzacji z widocznym zagęszczeniem elementów skończonych na powierzchniach bocznych zębów:
a) modele dwuwymiarowe – 2D, b) modele przestrzenne – 3D

W obydwu przypadkach szczególnie gęstą siatkę elementów skończonych zdefiniowano na powierzchniach bocznych i u podstawy zęba ze względu na przewidywane wysokie wartości naprężeń w tych obszarach. W pozostałej części modelu ustalono znacznie mniej gęstą siatkę, która ma jedynie zapewnić wymaganą sztywność i przenieść zadane obciążenie [4, 7, 12].

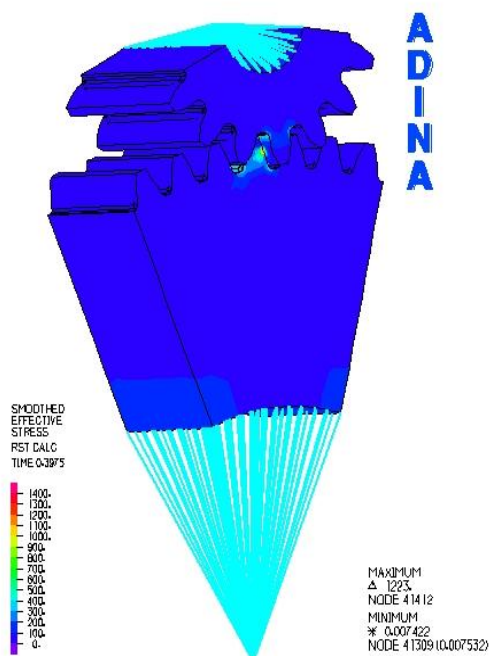
W wyniku przeprowadzonego podziału modeli płaskich kół zębatych uzyskano 14260 elementów skończonych i 44435 węzłów w obydwu modelach. Dla modelu 3D wygenerowano łącznie 304606 elementów skończonych oraz 447613 węzłów w dwóch grupach odpowiadających każdemu z kół zębatych. Dziesięciokrotnie mniejsza liczba węzłów w przypadku modeli dwuwymiarowych spowodowała, że obliczenia w *solverze* programu ADINA trwały kilkakrotnie krócej. Przez to również rozmiar plików wynikowych, a więc obróbka i analiza otrzymanych rezultatów była znacznie szybsza i wygodniejsza,

Przy doborze elementów skończonych uwzględniono, że rozpatrywane zagadnienie jest geometrycznie nieliniowe, co wynika z uwzględnienia kontaktu współpracujących modeli kół oraz z zastosowanej w obliczeniach teorii dużych przemieszczeń. Całe obliczenia podzielone zostały na 100 kroków obliczeniowych, a wyniki dotyczące każdego kroku automatycznie zapisywano w celu późniejszego ich wykorzystania w analizie.

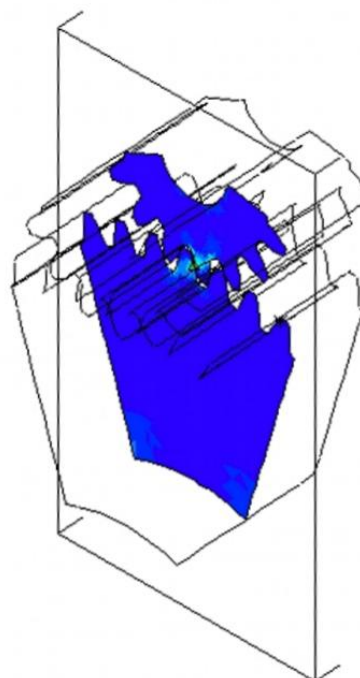
3. WYNIKI ANALIZY

Podstawowym wynikiem przeprowadzonych obliczeń jest prezentowany w postprocesorze programu ADINA rozkład naprężeń zredukowanych w modelach kół przekładni walcowej. Przykładowe rozwiązanie dla obliczeń dotyczących modeli przestrzennych zaprezentowano na rys.2. Wyniki w tej formie są mało czytelne i nie nadają się do właściwej analizy wytrzymałościowej. W postprocesorze programu ADINA możliwe jest również zaprezentowanie rozkładu naprężeń w wybranym przekroju analizowanych modeli, co znacznie poprawia czytelność i ułatwia interpretację wyników. Na rys.3 przedstawiono rozkład naprężeń zredukowanych w przekroju poprzecznym zdefiniowanym w środku

szerokości koła zębatego. Przekrój ten odpowiada utworzonemu wcześniej na modelach CAD, który stanowił podstawę dla zaimportowanego modelu dwuwymiarowego przekładni zębatej walcowej.



Rys. 2. Rozkład naprężeń zredukowanych



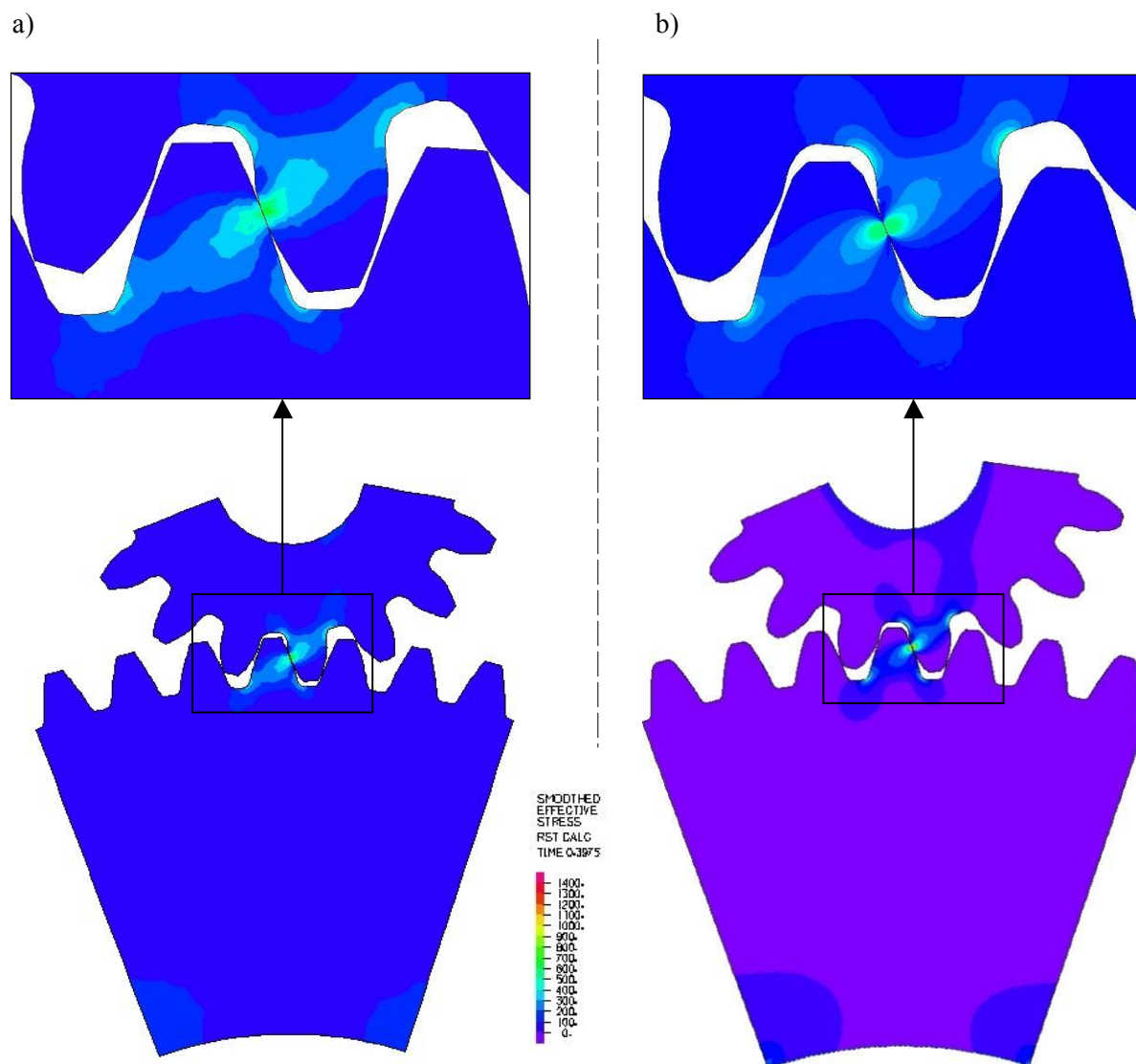
Rys. 3. Przekrój poprzeczny

Podwyższone poziomy naprężeń występują w obszarze wieńców zębatych obydwu współpracujących kół. Aby określić przydatność modeli dwuwymiarowych do określenia wartości rozkładu naprężeń w kołach zębatych walcowych o zębach prostych, przeprowadzono porównanie wyników otrzymanych z użyciem modeli przestrzennych i płaskich. Zarówno wymiary kół zębatych jak i warunki brzegowe i obciążenie modeli w obydwu przypadkach przyjęto identyczne, a jedyna różnica dotyczyła sposobu definiowania modeli do obliczeń. W przypadku modeli przestrzennych wczytano do preprocesora programu ADINA pełne modele bryłowe, natomiast w przypadku modeli dwuwymiarowych obliczenia przeprowadzone zostały na podstawie modeli płaskich o jedynie zdefiniowanej szerokości równej 20mm.

Wyniki obliczeń, w postaci rozkładu naprężeń uzyskane dla modeli 3D i 2D, otrzymane dla tego samego etapu zazębienia przedstawione zostały na rys. 4. Wyniki dotyczące modeli przestrzennych prezentują rozkład naprężeń w przekroju środkowym zdefiniowanym jak na rys. 3.

Rozkład naprężeń uzyskany dla modelu przestrzennego i dwuwymiarowego jest porównywalny zarówno co do wartości w poszczególnych obszarach jak i ich rozmieszczenia. Należy natomiast zwrócić uwagę, że obraz naprężeń otrzymany dla modeli płaskich jest dokładniejszy i bardziej wygładzony niż dla modeli przestrzennych. Jest to skutek znacznie gęściejszej siatki w przypadku modelu dwuwymiarowego. Ponieważ na całym modelu obliczeniowym można zdefiniować jedynie określoną liczbę elementów, ograniczoną wydajnością komputera, to w przypadku modelu dwuwymiarowego na analizowany obszar współpracy przypada znacznie większa ich liczba, co zdecydowanie poprawia dokładność obliczeń. Oczywiście, takie uproszczenie modelu dopuszczalne jest jedynie wówczas gdy można model dwuwymiarowy zdefiniować jako płaski stan naprężenia lub odkształcenia. Dla obydwu typów modeli obliczeniowych porównano wartości i rozkład naprężeń

w charakterystycznych obszarach i wybranych węzłach, aby określić poprawność otrzymanych wyników. Uzyskano zbliżony rozkład oraz poziom naprężeń, a wartości naprężeń maksymalnych w obydwu przypadkach są bardzo podobne, na poziomie 1200 MPa. Tak więc przyjęte ograniczenia i założenia pozwalają w prostszy sposób, lecz z wystarczająco dużą dokładnością, przeprowadzić obliczenia kół zębatach walcowych o zębach prostych z wykorzystaniem modeli dwuwymiarowych

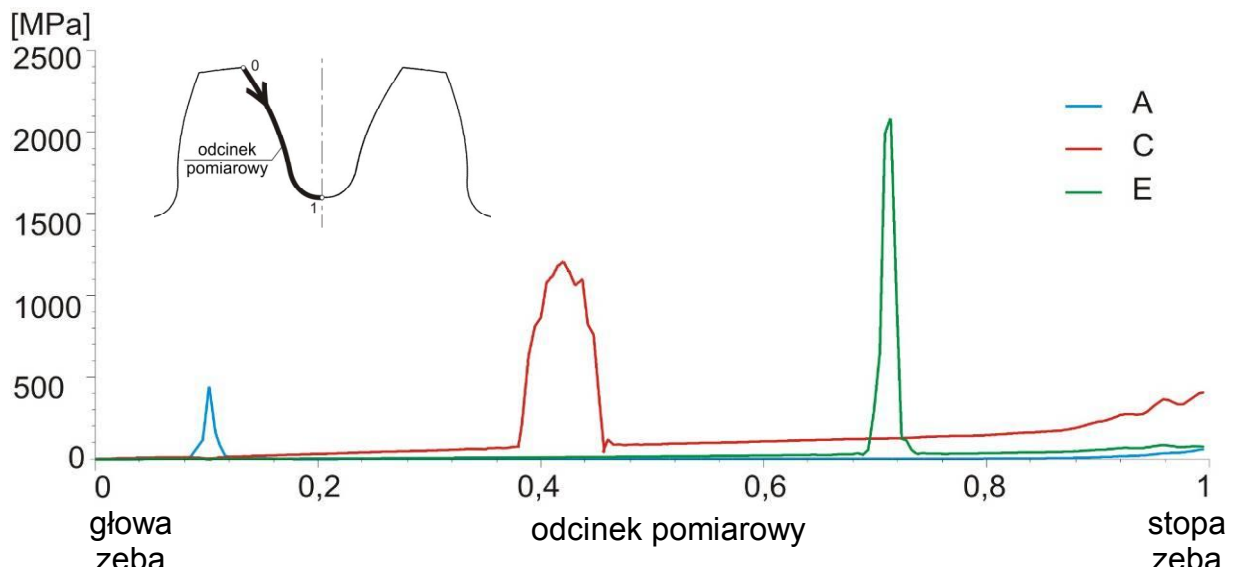


Rys. 4. Widok ogólny i szczegół wyników obliczeń modeli koła zębatego i zębniaka otrzymany na podstawie modeli: a) przestrzennych – 3D, b) dwuwymiarowych – 2D

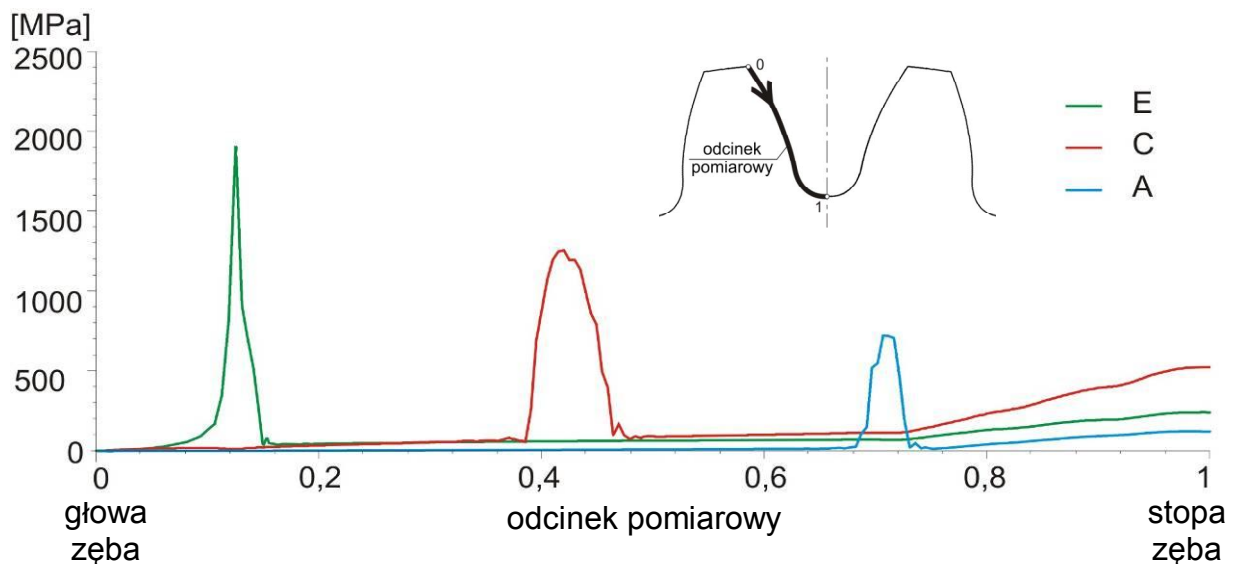
Po potwierdzeniu poprawności obliczeń kół zębatach przekładni walcowej z zastosowaniem modeli płaskich, dalszą analizę można przeprowadzić z wykorzystaniem tego typu modeli. W pierwszej kolejności wyznaczono wartości naprężeń stykowych na powierzchni bocznej współpracujących zębów dla modeli dwuwymiarowych. Maksymalne wartości naprężeń występują w miejscu kontaktu powierzchni bocznej zęba koła zębatego z powierzchnią boczną zęba zębniaka oraz u podstawy zębów.

Każdy z zębów kół jest poddawany cyklicznie obciążeniu wywołanemu przez ząb koła współpracującego. Obciążenie nie jest podczas tej współpracy stałe, a przebiega wieloetapowo. Pierwszy etap to współpraca dwuparowa, gdy kontakt występuje pomiędzy

dwoma sąsiednimi parami zębów na każdym z kół, następnie współpraca jednoparowa, gdy styka się ze sobą jedna para zębów i ponownie współpraca dwuparowa, gdy dochodzi do kontaktu dwóch par kolejnych zębów współpracujących kół. W celu bardziej czytelnego zaprezentowania wyników obliczeń utworzono wykresy naprężeń stykowych na powierzchni bocznej zęba koła zębatego (rys. 5) oraz zębniaka (rys. 6). Rysunki przedstawiają po trzy wykresy dotyczące współpracy zęba oznaczone zgodnie z PN-ISO 6336 [9] jako: A - początek odcinka przyporu, C – biegun zazębienia, E - koniec odcinka przyporu. Wartości liczbowe na osi poziomej odpowiadają proporcjonalnie długości odcinka pomiarowego.



Rys. 5. Wartości naprężeń stykowych w charakterystycznych punktach współpracy na powierzchni bocznej zęba koła zębatego



Rys. 6. Wartości naprężeń stykowych w charakterystycznych punktach współpracy na powierzchni bocznej zęba zębniaka

Głównym punktem analizy jest wykres czerwony przedstawiający naprężenia stykowe w chwili, gdy ząb koła zębatego i zębniaka stykają się w biegunie zazębienia. Wartości naprężeń,

występujące w zębniku i kole zębatym, nieznacznie się różnią mimo wcześniejszego założenia, że każda z powierzchni kontaktowych przenosi po 50% obciążenia. Taki wynik może być skutkiem różnej strzałki krzywych opisujących zarysy współpracujących zębów w biegunie zazębienia. Z charakteru wykresu wynika również, że styk współpracujących zębów nie jest punktowy, lecz posiada pewną szerokość. Zgodnie z normą PN-93/M-88509 ten obszar podwyższonych naprężeń na boku zęba określony jest jako chwilowy ślad przylegania [8, 13].

4. PODSUMOWANIE

Na podstawie przeprowadzonych rozważań można stwierdzić, że wybór właściwego modelu w obliczeniach numerycznych z zastosowaniem MES może mieć kluczowe znaczenie dla przebiegu i poprawności analizy wytrzymałościowej. Niniejsze rozważania potwierdzają, że w przypadku kół zębatych walcowych o zębach prostych możliwe jest uproszczenie obliczeń przez przekształcenie ich w zagadnienie dwuwymiarowe. Dzięki takiemu uproszczeniu geometrii obliczenia wytrzymałościowe można potraktować jako płaski stan naprężeń, w którym modelem obliczeniowym jest przekrój poprzeczny koła zębatego, prostopadły do jego osi, utworzony na środku szerokości wieńca zębatego. Jednak dla przygotowanych do obliczeń numerycznych modeli należy uwzględnić założenia, że szerokość kół zębatych jest mała w stosunku do ich średnicy, a zadane obciążenia zewnętrzne kół zębatych rozkładają się równomiernie na całej ich szerokości i działają jedynie w płaszczyźnie wydzielonego przekroju.

Przyjęte do analizy modele dwuwymiarowe oraz opracowane procedury pozwoliły znacząco skrócić czas obliczeń numerycznych z zastosowaniem metody MES przy zachowaniu wysokiej dokładności otrzymanych wyników. Na powierzchniach bocznych zębów współpracujących kół zdefiniowano powierzchnie kontaktowe, co pozwoliło na odwzorowanie rzeczywistych warunków pracy przekładni. Zastosowanie dwuwymiarowych modeli obliczeniowych pozwoliło na precyzyjne określenie rozkładu i wielkości naprężeń stykowych na powierzchniach bocznych, a także wewnątrz modeli kół zębatych. Przeprowadzone obliczenia umożliwiły także określenie zmiany naprężeń zginających u podstawy zębów obydwu kół w kolejnych etapach współpracy.

Ze względu na krótki czas obliczeń oraz uzyskaną dużą dokładność rozkładu naprężeń w szczególnie narażonych obszarach można z powodzeniem stosować modele dwuwymiarowe w wybranych typach analizy wytrzymałościowej. Przygotowane w opisany sposób dwuwymiarowe modele obliczeniowe kół zębatych przekładni walcowej o zębach prostych mogą służyć do automatycznego przeprowadzania analiz dla dużej liczby modeli kół zębatych o różnych parametrach geometrycznych i materiałowych.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008-2010 jako projekt badawczy rozwojowy (N R03 0004 04).

LITERATURA

1. Bąk R., Burczyński T.: Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego. Warszawa: WNT, 2001.
2. Budzik G., Pacana J.: Analiza poprawności rozwiązania MES w zależności od rodzaju oraz liczby zastosowanych elementów skończonych. „Acta Mechanica Slovaca” 3-A/2008, PRO-TECH-MA Ročník 12, Kosiče 2008.
3. Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A.: Przekładnie walcowe. T. 1. Warszawa: WKŁ, 1992.

4. Kleiber M.: Komputerowe metody mechaniki ciał stałych. Warszawa: PWN, 1995.
5. Markowski T., Mijał M. Rejman E.: Podstawy konstrukcji maszyn: napędy mechaniczne. Rzeszów: Oficyna Wyd. Pol. Rzesz., 1999.
6. Müller L.: Przekładnie zębate. Obliczenia wytrzymałościowe. Warszawa : WNT, 1972.
7. Pacana J., Budzik G., Kudasik T.: Wyznaczanie naprężeń zginających w kołach zębatych z zastosowaniem metody elementów skończonych. „Acta Mechanica Slovaca 3”-A/2008, PRO-TECH-MA Ročník 12, Kosiče 2008r.
8. PN-93/M-88509. Przekładnie zębate. Przekładnie walcowe. Terminologia i oznaczenia.
9. PN-ISO 6336 PN-ISO 6336. Przekładnie zębate walcowe. Obliczanie nośności kół
10. Rakowski G., Kacprzyk Z.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Warszawa : Oficyna Wyd. Pol. Warsz., 2005.
11. Rusiński E., Czmochoński J., Smolnicki T.: Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych. Wrocław : Oficyna Wyd. Pol. Wrocław, 2000.
12. Wiktor J.: Układ obliczeń optymalizacyjnych uzębień walcowych. Zesz. Nauk. Pol. Rzesz. 1993, nr 119 „Mechanika” z. 39, s. 59-68.
13. Wiktor J.: Analityczno numeryczne metody analizy parametrów geometrycznych, zakłóceń ruchu i wytrzymałości przekładni walcowych. Rzeszów: Oficyna Wyd. Pol. Rzesz., 2004.

NUMERICAL MODEL SELECTION CRITERIA FOR CYLINDRICAL GEAR STRENGTH CALCULATIONS WITH THE APPLICATION OF FEM

Summary. The article presents the strategy for setting the criteria of selecting the numerical model for the cylindrical gear strength calculations with the use of FEM. As the discussion herein pertains to cylindrical gears of straight teeth, it was possible to simplify the calculations through reducing them to a two-dimensional issue. Thanks to this geometry simplification, the analyzed issue can be defined as a flat state of stress, in which the calculation model is the gear cross-section perpendicular to the gear axis, created in the middle of the toothed wheel ring width.