

TRÓJKĄTNE PŁATY POWIERZCHNIOWE W MODELOWANIU GŁADKIEJ POWIERZCHNI BRZEGU W PURC DLA ZAGADNIENÍ USTALONEGO PRZEPIYWU CIECZY DOSKONALEJ

EUGENIUSZ ZIENIUK, KRZYSZTOF SZERSZEN

*Institut Informatyki, Zakład Metod Numerycznych, Uniwersytet w Białymstoku
Sosnowa 64, 15-887 Białystok
e-mail: ezieniuk@ii.uwb.edu.pl, kszerszen@ii.uwb.edu.pl*

Streszczenie. W pracy zaproponowano modelowanie powierzchni brzegu na styku ciała i cieczy dla przestrzennych zagadnień przepływowych, przy użyciu trójkątnych powierzchni Béziera. Takie modelowanie brzegu ma być w założeniach prezentowanych badań podejściem alternatywnym w stosunku do dotychczasowej praktyki generowania siatek elementowych w MEB. Od strony numerycznej obliczenia rozpatrywanego zagadnienia opływu zostały zrealizowane na podstawie parametrycznych układów równań całkowych (PURC).

1. WSTĘP

Jednym z podstawowych zagadnień hydro i aeromechaniki jest opływ ciała stałego w ośrodku cieczy doskonałej, tzn. nielepkiej i nieściśliwej. Od strony matematycznej takie zagadnienie może być utożsamione z analizą problemu brzegowego, który przy założeniu bezwirowości przepływu przyjmuje charakter potencjalny opisywany równaniem Laplace'a.

Do komputerowego rozwiązania tak zdefiniowanego zagadnienia przepływowego, obok popularnej w praktyce metody elementów skończonych (MES), w naturalny sposób predysponowana jest metoda elementów brzegowych (MEB), w której fizyczna dyskretyzacja ogranicza się wyłącznie do brzegu na styku ciała i cieczy. Niestety, z uwagi na specyfikę MEB rozwiązania na brzegu otrzymywane są w postaci dyskretnej w poszczególnych punktach węzłowych. Ponadto liczba tych węzłów jest ściśle powiązana z liczbą wprowadzonych elementów brzegowych siatki elementowej. Dlatego też w celu poprawy dokładności, jak również sprawdzenia zbieżności rozwiązań, należy podzielić brzeg na większą liczbę takich elementów, w praktyce wymuszając ponowną deklarację takiej siatki. Szczególnie uciążliwe wydaje się to w przypadku zagadnień przestrzennych, w których siatka elementowa składa się z setek i tysięcy takich elementów. Dodatkowym problemem jest zapewnienie ciągłości na krawędziach łączenia sąsiednich elementów w tak zbudowanej strukturze elementowej modelującej powierzchnię brzegu. W przypadku zagadnień przepływowych najczęściej ciała te są o powierzchni gładkiej i krzywoliniowej.

W prezentowanej pracy podjęto się próby wprowadzenia znanych z grafiki komputerowej trójkątnych płatów powierzchni Béziera do modelowania trójwymiarowej kształtu brzegu w zagadnieniach ustalonego przepływu cieczy idealnej. Cel ten wydaje się jest możliwy do zrealizowania dzięki połączeniu takiego sposobu definiowania brzegu z istniejącą

i szczególnie przetestowaną wcześniejszą koncepcją parametrycznych układów równań całkowych (PURC), głównie dla zagadnień dwuwymiarowych.

2. TRÓJKATNE PŁATY BÉZIERA

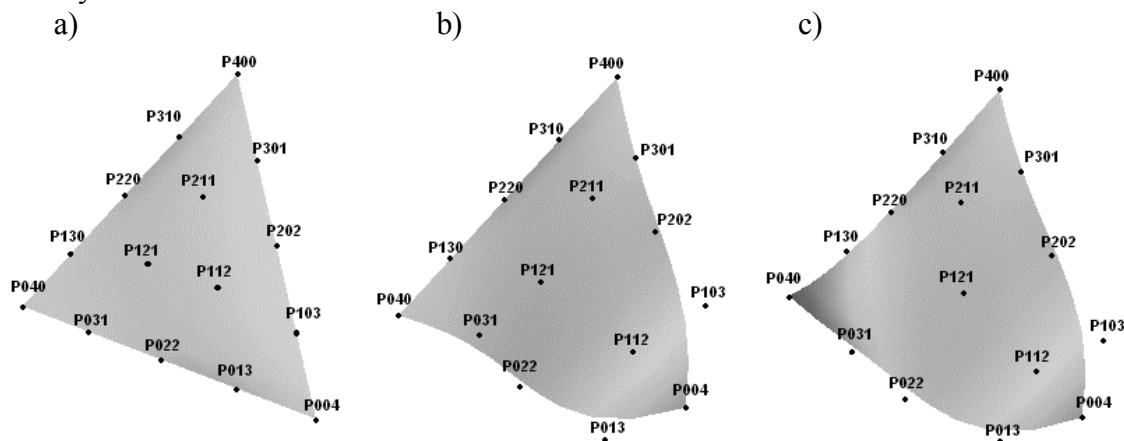
Trójkątny płat Béziera stopnia n jest definiowany przez zbiór $0.5(n+1)(n+2)$ punktów kontrolnych $P_{i,j,k}$. Matematyczna formuła takiego płata jest uzależniona jest od trzech parametrów v, w, u [1]:

$$P^n(v, w, u) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} P_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(v, w, u), \quad B_{i,j,k}^n(v, w, u) = \frac{n!}{i!j!k!} v^i w^j u^k \quad (1)$$

gdzie $0 \leq v, w, u \leq 1$, $v + w + u \leq 1$, zaś $B_{i,j,k}^n(v, w, u)$ są funkcjami bazowymi Bernsteina n -tego stopnia. Po podstawieniu w formule (1) $u = 1 - w - v$ i przy wprowadzeniu dodatkowych ograniczeń $0 \leq v, w \leq 1$ oraz $v + w \leq 1$ otrzymujemy bardziej dogodną matematyczną formę opisu takich płatów, uzależnioną wyłącznie od dwóch parametrów v, w :

$$P^n(v, w) = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} P_{i,j,k} B_{i,j,k}^n(v, w, 1-v-w), \quad B_{i,j,k}^n(v, w, 1-v-w) = \frac{n!}{i!j!k!} v^i w^j (1-v-w)^k. \quad (2)$$

Podstawową zaletą płatów Béziera jest prostota definiowania (rys. 1a) i modyfikacji (rys. 1bc) skomplikowanych kształtów powierzchni za pomocą jedynie niewielkiej liczby punktów kontrolnych. Na rys. 1a przedstawiono wizualizację takiego płata deklarowanego 15 punktami kontrolnymi.



Rys. 1. Trójkątny płat Béziera stopnia 4: a) definiowanie 15 punktami kontrolnymi, b) i c) modyfikacje płata po przesunięciu wybranych punktów kontrolnych

Możliwa jest w ten sposób deklaracja zarówno płaskich powierzchni trójkątnych (rys. 1a), jak również powierzchni krzywoliniowych. Modyfikację kształtu płata po przesunięciu wybranych punktów kontrolnych zaprezentowano na rys. 1b,c.

3. PURC Z BRZEGIEM MODELOWANYM TRÓJKĄTNYMI PŁATAMI BÉZIERA

Przedstawiony sposób modelowania brzegu polegający na wykorzystaniu trójkątnych płatów powierzchni może być wkomponowany w parametrycznych układach równań

całkowych (PURC), dających możliwość efektywnego numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych. Formuła PURC w przypadku płatów trójkątnych jest analogiczna jak w przypadku wcześniej testowanych płatów prostokątnych Béziera [7] i przedstawiana następująco:

$$0.5u_l(v_1, w_1) = \sum_{j=1}^n \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{w_{j-1}}^{w_j} \left\{ \bar{U}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) p_j(v, w) - \bar{P}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) u_j(v, w) \right\} J_j(v, w) dv dw, \quad (3)$$

oraz $v_{j-1} < v < v_j$, $w_{j-1} < w < w_j$, $l = 1, 2, 3 \dots n$.

Integracja wprowadzonego modelowania powierzchni brzegu z formułą PURC realizowana jest głównie w funkcjach podcałkowych (jądrach) równania (3) za pomocą następujących wyrażeń:

$$\bar{U}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{[\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2]^{0.5}}, \quad \bar{P}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) = \frac{1}{4\pi} \frac{\eta_1 n_1^{(j)} + \eta_2 n_2^{(j)} + \eta_3 n_3^{(j)}}{[\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2]^{1.5}}, \quad (4)$$

w których to brzeg jest zdefiniowany za pomocą funkcji η_1, η_2, η_3 :

$$\eta_1 = P_l^{(1)}(v_1, w_1) - P_j^{(1)}(v, w), \quad \eta_2 = P_l^{(2)}(v_1, w_1) - P_j^{(2)}(v, w) \quad \text{oraz} \quad \eta_3 = P_l^{(3)}(v_1, w_1) - P_j^{(3)}(v, w), \quad (5)$$

uwzględniających w swoim formalizmie matematycznym definiowanie brzegu za pomocą dowolnych funkcji parametrycznych $P(v, w)$. W pracy wykorzystywane są trójkątne płaty Béziera przedstawione wzorem (2).

Funkcje brzegowe $u_j(v, w)$, $p_j(v, w)$ w (3) są zdefiniowane na płatach Béziera, modelujących geometrię brzegu. Jedną z tych funkcji $u_j(v, w)$ (lub $p_j(v, w)$) w zależności od typu rozwiązywanego zagadnienia brzegowego będzie zadana w postaci warunków brzegowych, natomiast druga będzie poszukiwana w wyniku rozwiązania PURC. Funkcje brzegowe zadane jak i poszukiwane są aproksymowane za pomocą następujących szeregów aproksymujących [7]:

$$p_j(v, w) = \sum_{p=0}^N \sum_{r=0}^M p_j^{(pr)} T_j^{(p)}(v) T_j^{(r)}(w), \quad u_j(v, w) = \sum_{p=0}^N \sum_{r=0}^M u_j^{(pr)} T_j^{(p)}(v) T_j^{(r)}(w), \quad (6)$$

gdzie $u_j^{(pr)}$, $p_j^{(pr)}$ są niewiadomymi współczynnikami, $\bar{n} = N \times M$ jest liczbą współczynników na poszczególnych płatach Béziera, natomiast $T_j^{(p)}(v)$, $T_j^{(r)}(w)$ są globalnymi funkcjami bazowymi – wielomianami Czebyszewa.

Rozwiązanie w obszarze jest otrzymywane na podstawie następującej tożsamości całkowej:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{w_{j-1}}^{w_j} \left\{ \hat{U}_j^*(\mathbf{x}, v, w) p_j(v, w) - \hat{P}_j^*(\mathbf{x}, v, w) u_j(v, w) \right\} J_j(v, w) dv dw, \quad \mathbf{x} \equiv \{x_1, x_2, x_3\} \quad (7)$$

oraz $v_{j-1} < v < v_j$, $w_{j-1} < w < w_j$, $l = 1, 2, 3 \dots n$.

W (7) funkcje podcałkowe są przedstawiane za pomocą następujących wzorów:

$$\hat{U}_j^*(\mathbf{x}, v, w) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{[\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 + \bar{r}_3^2]^{0.5}}, \quad \hat{P}_j^*(\mathbf{x}, v, w) = \frac{1}{4\pi} \frac{\bar{r}_1 n_1^{(j)} + \bar{r}_2 n_2^{(j)} + \bar{r}_3 n_3^{(j)}}{[\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 + \bar{r}_3^2]^{1.5}}, \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{x} \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$ to współrzędne punktów w obszarze oraz $\bar{r}_1 = x_1 - P_j^{(1)}(v, w)$, $\bar{r}_2 = x_2 - P_j^{(2)}(v, w)$ i $\bar{r}_3 = x_3 - P_j^{(3)}(v, w)$, w których to również brzeg jest zdefiniowany analogicznie jak w (5).

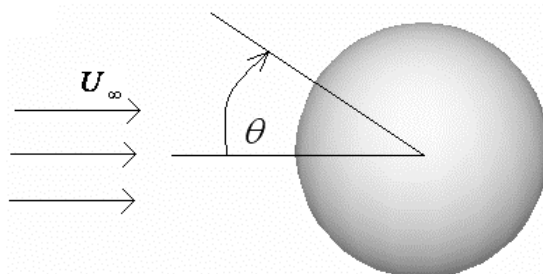
Do rozwiązywania PURC dla zagadnień trójwymiarowych uogólniono metodę pseudospektralną [1] stosowaną już wcześniej w przypadku zagadnień płaskich. W przypadku

rozwiązywania prezentowanych zagadnień brzegowych niezwykle ważnym problemem jest opracowanie efektywnego i dokładnego sposobu obliczania pojawiających się w matematycznej formule PURC całek powierzchniowych. Zostało to zrealizowane poprzez wprowadzenie kwadratur trójkątnych wyższego rzędu. Niezwykle cenna okazała się w tym przypadku publikacja [4], w której wyprowadzono kwadratury trójkątne w maksymalną liczbą współczynników $n = 175$. W przypadku, gdy $l = j$, w formule (3) pojawia się konieczność obliczenia całek osobliwych. Zostało to zrealizowane poprzez wydzielenie punktu osobliwego poprzez podział lokalnej płaszczyzny odwzorowania v, w , na płaszczyzny składowe, a następnie na zastosowaniu do płaszczyzn składowych sposobów całkowania jak w przypadku całek regularnych z wykorzystaniem kwadratury trójkątnej wysokiego rzędu prezentowanej w pracy [4].

4. BADANIA TESTOWE

4.1. Zdefiniowanie problemu

Na bazie przytoczonych wzorów matematycznych opracowano pakiet oprogramowania dla PURC, który praktycznie został przetestowany na przedstawionym poniżej przykładzie testowym. W przykładzie tym rozpatrywano stacjonarny opływ jednostkowej kuli cieczą doskonałą w kierunku OX .



Rys. 2. Stacjonarny opływ jednostkowej kuli cieczą doskonałą w kierunku OX

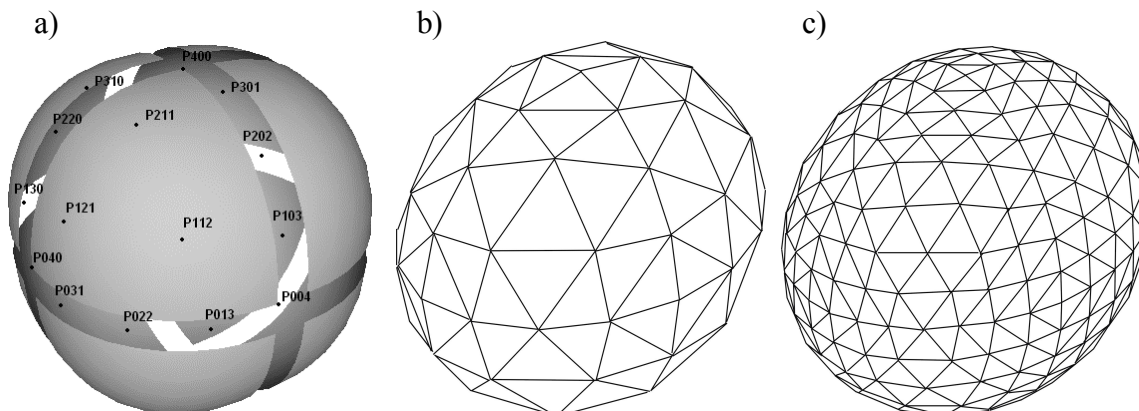
Znane jest rozwiązanie analityczne tak postawionego problemu, w którym potencjał prędkości rozpatrywanego opływu opisywany jest następującą zależnością [5]:

$$\phi = U_{\infty} r \cos \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right), \quad (9)$$

przy czym U_{∞} oznacza prędkość napływu, R jest promieniem kuli, natomiast r promieniem wodzącym punktu, w którym jest wyznaczany potencjał prędkości, zaś θ kątem pomiędzy kierunkiem napływu i promieniem wodzącym.

4.2. Analiza efektywności modelowania brzegu oraz uzyskanych rozwiązań numerycznych w PURC oraz MEB

Rozwiązanie numeryczne zdefiniowanego zagadnienia przepływowego otrzymano na bazie proponowanego modelowania brzegu wkomponowanego w PURC oraz klasycznej MEB.



Rys. 3. Modelowanie sfery: a) 8 płatami Béziera, b) 128 oraz c) 512 trójkątnymi elementami brzegowymi w MEB

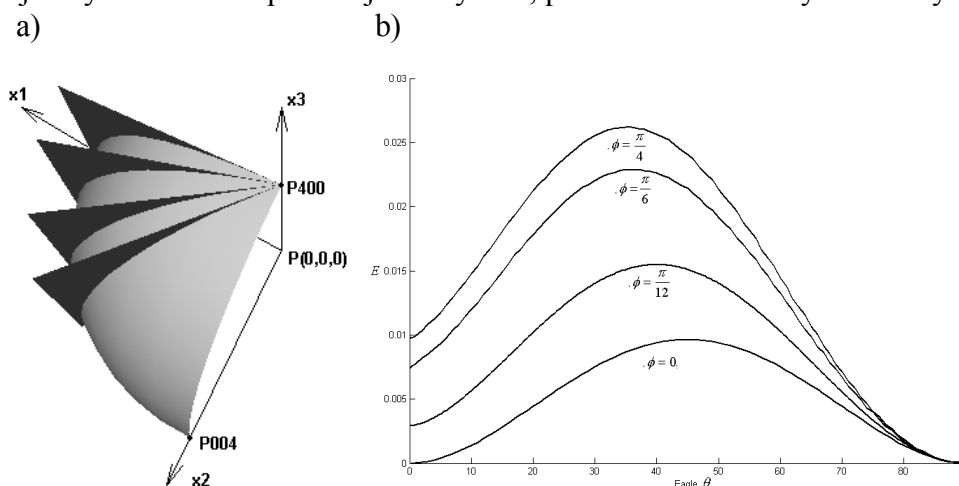
Na rys. 3a przedstawiono sferę bezpośrednio wykreowaną na bazie proponowanych i szczegółowo omówionych już w rozdziale 2. trójkątnych płatów Béziera. Prezentowany sposób modelowania sfery płatami trójkątnymi zaczerpnięto wprost z grafiki komputerowej. Zadane współrzędne 15 punktów kontrolnych dla jednego z ośmiu składowych płatów stopnia 4. zestawiono poniżej [6]:

$$\begin{array}{cccccc}
 P_{004} \{0,1,0\} & P_{013} \{\alpha,1,0\} & P_{022} \{\beta,\beta,0\} & P_{031} \{1,\alpha,0\} & P_{040} \{1,0,0\} & \\
 P_{103} \{0,1,\alpha\} & P_{112} \{\gamma,1,\gamma\} & P_{121} \{1,\gamma,\gamma\} & P_{130} \{1,0,\alpha\} & & \\
 P_{202} \{0,\beta,\beta\} & P_{211} \{\gamma,\gamma,1\} & P_{220} \{\beta,0,\beta\} & & & \\
 P_{301} \{0,\alpha,1\} & P_{310} \{\alpha,0,1\} & & & & \\
 P_{400} \{0,0,1\} & & & & &
 \end{array} , \quad (10)$$

gdzie $\alpha = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{3}$, $\beta = (\sqrt{3} + 1)/2\sqrt{3}$, $\gamma = 1 - (5 - \sqrt{2})(7 - \sqrt{3})/46$.

Po połączeniu zewnętrznych krawędzi poszczególnych płatów uformowano zamkniętą powierzchnię sfery. Wykreowany model sfery wymagał zadania ogólnej liczby 56 punktów kontrolnych. Tak modelowana sfera będzie w dalszych rozważaniach reprezentowała geometrię obliczanego w PURC zagadnienia brzegowego na styku ciała i cieczy z punktu 4.1.

Należy podkreślić wysoką dokładność odwzorowania kształtu prezentowanej geometrii w odniesieniu do idealnej sfery. Błąd takiego odwzorowania, wyrażony jako różnica pomiędzy promieniem wodzącym punktu na tak ukształtowanym płacie Béziera oraz promieniem jednostkowej sfery dla czterech przekrojów z rys. 4a, przedstawiono na wykresie z rys. 4b.



Rys. 4. Różnica pomiędzy promieniem wodzącym punktu na płacie Béziera oraz promieniem jednostkowej sfery wyznaczona dla czterech przekrojów płata

Obliczenia porównawcze MEB zrealizowano na podstawie dołączonego do pozycji [3] pakietu oprogramowania BEMLIB. W przypadku rozwiązań MEB dokonano dyskretyzacji sfery z użyciem 6-węzłowych trójkątnych elementów brzegowych. Dwa z trzech rozpatrywanych wariantów dyskretyzacji sfery w MEB z podziałem odpowiednio na 128 oraz 512 trójkątne elementy brzegowe przedstawiono na rys. 3bc.

W przeprowadzonej poniżej analizie zweryfikowano poprawność stworzonego kodu PURC oraz zbadano zgodność uzyskiwanych wyników z rozwiązaniem dokładnym (9). Ponadto oceniono efektywność takiego modelowania w stosunku do MEB zarówno pod względem zbieżności rozwiązań, jak również złożoności modelowania trójwymiarowej geometrii obszaru oraz złożoności obliczeniowej wyrażonej liczbą rozwiązywanych równań algebraicznych. Szczegółowe rezultaty analizy porównawczej zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Porównanie uzyskanych rozwiązań numerycznych w PURC oraz MEB

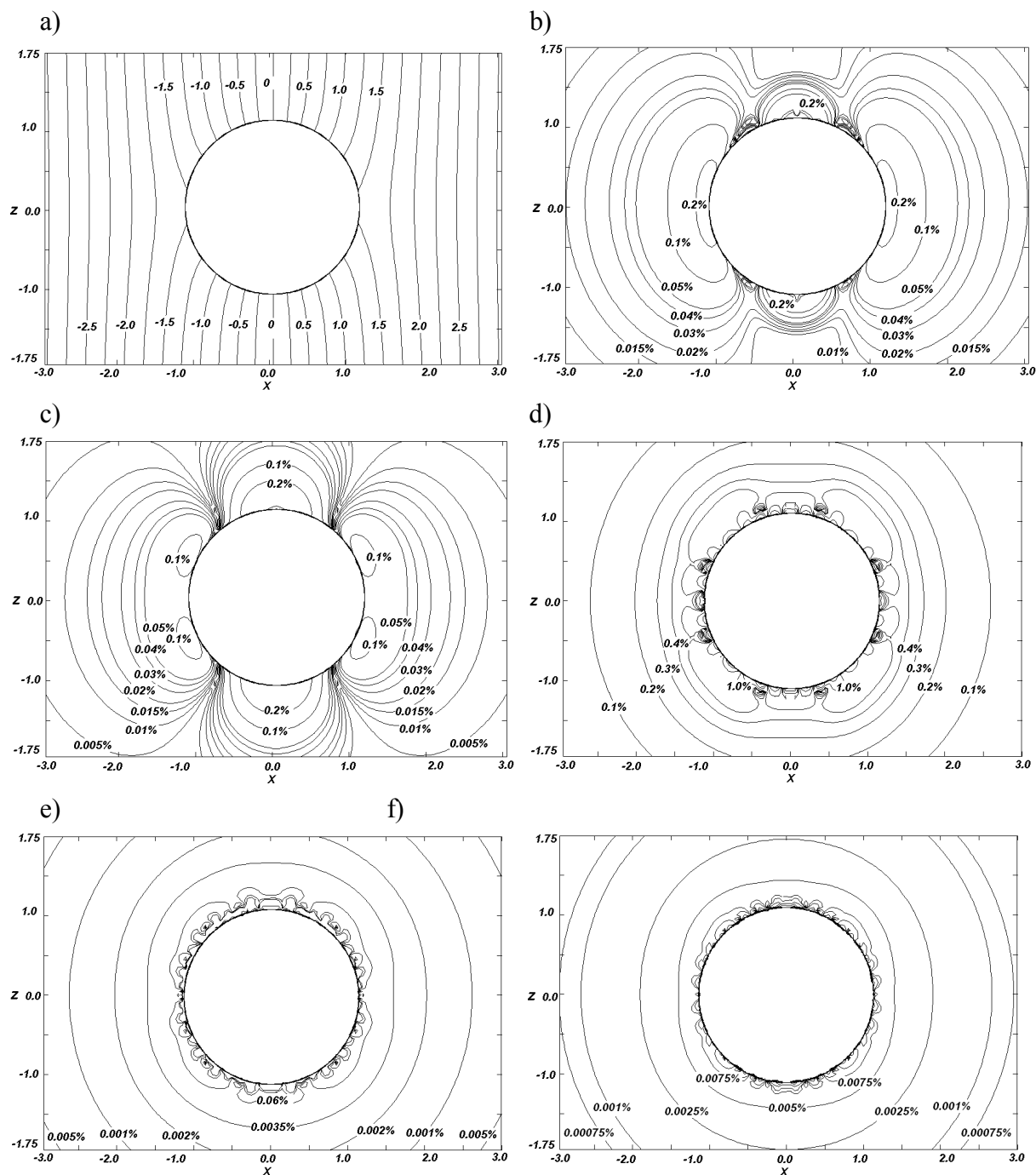
	PURC		MEB		
Liczba danych opisujących brzeg	56	56	66	258	1026
Liczba rozwiązywanych równań	48	72	66	258	1026
Błąd rozwiązań^a	0.0855	0.0399	3.0420	0.9474	0.3093

^a miara błędów na podstawie normy L_2 na zbiorze 400 punktów pomiarowych

Globalną ocenę dokładności rozwiązań zrealizowano na podstawie miary błędów z wykorzystaniem normy L_2 . Przeanalizowano w tym przypadku rezultaty w PURC oraz MEB uzyskane w 400 punktach pomiarowych w obszarze przepływu i odniesione do wartości analitycznych (9). Należy podkreślić, że w przypadku proponowanego podejścia uzyskano rozwiązania obciążone mniejszym błędem (kolumny 2,3) w porównaniu z MEB.

Rozdzielenie aproksymacji brzegu od funkcji brzegowych w formalizmie matematycznym PURC powoduje, że poprawa dokładności rozwiązań przy rozwiązywaniu większej liczby równań algebraicznych nie zmienia samej deklarowanej płatami powierzchniowymi geometrii. Stąd też wzrost liczby rozwiązywanych równań algebraicznych z 48 na 72 w PURC nie wymagał jakiegokolwiek modyfikacji w modelowanej 8 płatami Béziera geometrii brzegu z rys. 3a. W przypadku MEB poprawa dokładności rozwiązań była bezpośrednio związana ze wzrostem liczby elementów brzegowych oraz deklarujących je węzłów. W obliczeniach wprowadzono trzy warianty dyskretyzacji sfery, z liczbą węzłów równą odpowiednio 66, 258 oraz 1026 (kolumny 4-6). Należy podkreślić, że nawet przy deklaracji 1026 węzłów siatki MEB oraz wygenerowanym układzie 1026 równań algebraicznych rozwiązania numeryczne w MEB obciążone były większym błędem niż w PURC (kolumna 6).

Poniżej przedstawiano szczegółową wizualizację zarówno poszukiwanego pola przepływu, jak również błędów rozwiązań numerycznych w PURC oraz MEB na bazie warstwic błędu względnej wartości potencjału prędkości.



Rys. 5. Przestrzenny opływ kuli dla $y = 0$: a) potencjał prędkości, warstwy błęd względny potencjału prędkości w PURC po rozwiązaniu: b) 48 oraz c) 72 równań, w MEB po rozwiązaniu: d) 66, e) 258, f) 1026 równań

Należy zauważyć dużą zgodność rozwiązań w PURC oraz MEB z rozwiązaniem dokładnym (9) w całym rozpatrywanym obszarze.

5. WNIOSKI

W prezentowanej pracy zastosowano znane z grafiki komputerowej trójkątne płyty powierzchni Béziera do modelowania trójwymiarowego kształtu brzegu w zagadnieniach

ustalonego przepływu cieczy idealnej. Cel ten został zrealizowany dzięki połączeniu takiego sposobu definiowania brzegu z istniejącym PURC. Analiza rozwiązań numerycznych, potwierdza efektywność proponowanej strategii postępowania zarówno na poziomie modelowania geometrii brzegu, poprzez zmniejszenie liczby danych modelujących brzeg, jak również na poziomie dokładności uzyskanych rozwiązań w porównaniu z MEB.

Płatów trójkątnych Béziera nie należy w żaden sposób utożsamiać z elementami brzegowymi w MEB z trzech podstawowych powodów: 1) jest ich znacząco mniej niż w MEB i są one bezpośrednio analitycznie wkomponowane w PURC, 2) rozwiązania w PURC na brzegu otrzymywane są w postaci szeregów (funkcji), a nie w konkretnych punktach brzegowych jak w MEB, 3) przy dokładnym zamodelowaniu brzegu poprawianie dokładności rozwiązań jest niezależne od liczby płatów Béziera. Dlatego też w celu poprawy dokładności, jak również sprawdzenia zbieżności rozwiązań nie należy dzielić brzegu na większą liczbę tradycyjnych elementów brzegowych, w praktyce wymuszając ponowną dyskretyzację brzegu w MEB, co jest szczególnie uciążliwe w przypadku zagadnień przestrzennych. Dodatkową zaletą płatów Béziera bezpośrednio wkomponowanych w PURC jest łatwość zapewnienia ciągłości brzegu na krawędziach ich łączenia. Jest to cecha bardzo ważna szczególnie w przypadku rozwiązywania zagadnień przepływowych, ponieważ najczęściej ciała te są o powierzchni gładkiej i krzywoliniowej.

LITERATURA

1. Gottlieb D., S.A. Orszag: Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications. SIAM, Philadelphia, 1977.
2. Kiciak P.: Podstawy modelowania krzywych i powierzchni. Warszawa : WNT, 2000.
3. Pozrikidis C.: A Practical Guide to Boundary-Element Methods with the Software Library BEMLIB. Chapman & Hall/CRC Press 2002.
4. Wandzura S., Xiao H.: Symmetric Quadrature Rules on a Triangle. "Computers and Mathematics with Applications" 2003, 12(45), p.1829-1840.
5. Wang J., Joseph D.D.: Potential Flow of a Second-Order Fluid over a Sphere or an Ellipse."Journal of Fluid Mechanics" 2004, 511, p. 201-215.
6. Yong-Qing L., Ying-Lin K., Wei-Shi L.: Termination Criterium for Subdivision of Triangular Bézier Patch. "Computer and Graphics" 2002, 26, p. 67-74.
7. Zieniuk E., Szerszeń K.: Modelowanie kształtu brzegu bikubicznymi płatami Béziera w wielospójnych potencjalnych zagadnieniach brzegowych, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej 2005, nr 29, s. 539-545.

TRIANGULAR PATCHES IN MODELING OF SMOOTH BOUNDARY SURFACE IN PIES FOR PROBLEMS OF POTENTIAL FLOW OF A PERFECT FLUID

Summary. This paper is an attempt to model the surface of the boundary at the interface between solid and fluid domains for flow problems in 3D, using commonly used in computer graphics parametric triangular Bézier patches. The discussed way to model this type of boundary seems to be a competitive approach in relation to the existing practice of generating complex and labour-intensive grids known from MEB. This objective seems to be possible to achieve through a combination of the presented boundary modelling technique with existing and tested in detail earlier conception of parametric integral equation system (PIES), mainly for 2D problems.