

PURC W ROZWIĄZYWANIU NIELINIOWYCH DWUWYMIAROWYCH ZAGADNIĘŃ BRZEGOWYCH

EUGENIUSZ ZIENIUK, AGNIESZKA BOŁTUĆ

Zakład Metod Numerycznych, Uniwersytet w Białymstoku
e-mail: ezieniuk@ii.uwb.edu.pl, aboltuc@ii.uwb.edu.pl

Streszczenie. W pracy zaprezentowano efektywne podejście służące do rozwiązywania nieliniowych zagadnień brzegowych oraz dokonano jego wstępnej weryfikacji. Za źródło nieliniowości przyjęto równanie różniczkowe, za pomocą którego modelowane są rozpatrywane zagadnienia. Na sukces przedstawianego algorytmu składa się: użycie metody PURC (z powodzeniem stosowanej do rozwiązywania zagadnień liniowych), zaproponowanie efektywnego sposobu obliczania całek po obszarach i wreszcie efektywnego sposobu definiowania tych obszarów.

1. WSTĘP

Do modelowania różnego rodzaju zagadnień technicznych stosowane są równania różniczkowe liniowe takie jak: równanie Laplace'a, Poissona, Helmholtza czy równanie Naviera-Lamego stosowane do modelowania zagadnień z mechaniki ciała stałego. Do rozwiązywania zagadnień najczęściej stosowane są metody: MES [7], MEB [1], metody bezsiatkowe oraz wiele innych mniej popularnych. Wciąż brakuje jednak metody uniwersalnej, a zarazem najbardziej efektywnej, dla dowolnego zagadnienia brzegowego. Wszystkie metody mają zarówno wady, jak i zalety, dlatego też efektywne rozwiązywanie w dużym stopniu zależy od doboru najbardziej odpowiedniej metody do typu rozwiązywanego zagadnienia. Zaletą MES jest to, że za pomocą elementów skończonych można zamodelować dowolny obszar rozwiązywanego zagadnienia, ale z kolei wadą jest to, że ich liczba może być bardzo duża. Może to być bardzo uciążliwe w przypadku zagadnień wymagających wielokrotnego dyskretyzowania obszaru, jak ma to miejsce w przypadku rozwiązywania różnorodnych zagadnień wymagających procesów iteracyjnych. MEB była popularyzowana w środowisku naukowym i inżynierskim jako metoda, której główną zaletą jest brak dyskretyzacji obszaru. Dyskretyzacja sprowadzała się tylko do brzegu, w związku z tym liczba elementów była znacząco mniejsza. Dawało to możliwość rozwiązywania w sposób bardziej efektywny niektórych zagadnień brzegowych w porównaniu z MES. Wkrótce jednak się okazało, że rozwiązywanie zagadnień bardziej złożonych, jak np. zagadnień nieliniowych, wymaga całkowania po obszarze, które wymagało podzielenia obszaru na tzw. komórki. Z technicznego punktu widzenia proces ten nie jest niczym innym, jak podzieleniem obszaru na elementy skończone wcześniej stosowane w MES. Fascynacja MEB, jaka pojawiła się

w początkowym etapie jej rozwoju, zaczęła znikać. Problemem ciągle aktualnym pozostaje więc poszukiwanie metod bardziej efektywnych i uniwersalnych.

We własnych pracach przy rozwiązywaniu zagadnień brzegowych otrzymano parametryczne układy równań całkowych (PURC) [4,5], które są zmodyfikowaną wersją klasycznych brzegowych równań całkowych. Były one z sukcesem stosowane do zagadnień modelowanych różniczkowymi równaniami liniowymi. W tego typu zagadnieniach metoda ta okazała się bardziej efektywna w porównaniu z MEB, jeśli wzięło się pod uwagę: liczbę danych do zdefiniowania brzegu, liczbę rozwiązywanych równań algebraicznych oraz dokładność uzyskanych wyników. Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie PURC do rozwiązywania dwuwymiarowych zagadnień nieliniowych, zbadanie jego zalet oraz wad w porównaniu z klasycznymi metodami numerycznymi.

2. PURC W NIELINIOWYCH ZAGADNIENIACH BRZEGOWYCH

W prezentowanej pracy skupiono się na rozwiązywaniu nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego w następującej postaci [3]

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + \varepsilon u^n = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n > 1, \quad (1)$$

Jest gdzie $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ jest operatorem Laplace'a, $p(\mathbf{x})$ znaną funkcją, ε jest stałą, a obszar

Ω jest ograniczony brzegiem $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ z zadanymi warunkami brzegowymi $u = \bar{u}$ na

Γ_u oraz $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv q = \bar{q}$ na Γ_q .

Postępując analogicznie jak w [4], równanie nieliniowe (1) można sprowadzić do PURC przedstawianego w następującej postaci

$$0.5u_i(s_1) = \sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} \{ \bar{U}_{ij}^*(s_1, s) p_j(s) - \bar{P}_{ij}^*(s_1, s) u_j(s) \} J_j(s) ds + \int_{\Omega} \bar{U}_i^*(s_1, \mathbf{x}) [\varepsilon u(\mathbf{x})^n - p(\mathbf{x})] d\Omega(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Pierwsza i druga funkcja podcałkowa \bar{U}_{ij}^* , \bar{P}_{ij}^* we wzorze (2) jest znanym brzegowym rozwiązaniem podstawowym i osobliwym dla równania Laplace'a (w jawnej postaci przedstawione są w [4]), zaś funkcja podcałkowa \bar{U}_i^* dla całki po obszarze przedstawiona jest za pomocą wyrażenia znanego dla równania Poissona [6].

Bezpośrednie rozwiązanie PURC przedstawionego wzorem (2) nie jest możliwe z użyciem metod dotychczas stosowanych dla zagadnień liniowych modelowanych równaniami: Laplace'a, Poissona czy Helmholtza. Rozwiązanie tego równania wymaga w pierwszej kolejności specjalnego potraktowania, ponieważ w przeciwieństwie do zagadnień liniowych występuje w nim (dodatkowo) - w całce po obszarze - nieliniowa, a zarazem niewiadoma funkcja $u(\mathbf{x})^n$. Przy założeniu niedużej nieliniowości rozwiązywanego zagadnienia brzegowego (1) rozwiązanie równania (2) można sprowadzić do nieliniowego układu równań algebraicznych

$$Au_{i+1} = Bu_i + C, \quad (3)$$

a następnie rozwiązać go, stosując metody iteracyjne. W tym celu człon nieliniowy występujący w PURC powinien być przeniesiony na prawą stronę układu równań

algebraicznych (3), a występująca w nim niewiadoma funkcja u_i w obszarze powinna być potraktowana jako wartość znana w poszczególnych punktach obszaru. Najefektywniej z punktu widzenia zbieżności metody byłoby przyjmować dla iteracji $i = 0$ realne wartości poszukiwanej funkcji. W początkowym etapie iteracji w niektórych przypadkach można przyjmować wartości stałe lub zerowe. Po znalezieniu na podstawie (3) rozwiązania u_1 zostaje ono następnie przybliżane w kolejnych i -tych procesach iteracyjnych aż do momentu spełnienia zadanego warunku zbieżności procesu iteracyjnego. Proces iteracji można uznać za zakończony, jeżeli różnica pomiędzy otrzymanymi dwiema ostatnimi wartościami w poszczególnych punktach obszaru będzie nieznaczna ($|u_{i+1} - u_i| \leq \varepsilon$).

W celu uzyskania rozwiązań u w obszarze Ω wykorzystywana jest tożsamość całkowa następującej postaci

$$u(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} \left\{ \overline{U}_j^*(\mathbf{y}, s) p_j(s) - \overline{P}_j^*(\mathbf{y}, s) u_j(s) \right\} \mathbf{J}_j(s) ds + \int_{\Omega} \overline{U}_i^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) [\varepsilon u(\mathbf{x})^n - p(\mathbf{x})] d\Omega(\mathbf{x}), \quad (4)$$

gdzie funkcja \overline{U}_i^* dla całki po obszarze przyjmuje postać

$$\overline{U}_i^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\left[\hat{\eta}_1^2 + \hat{\eta}_2^2 \right]^{0.5}}, \quad \hat{\eta}_1 = y_1 - x_1, \quad \hat{\eta}_2 = y_2 - x_2, \quad x_1, x_2 \in \Omega.$$

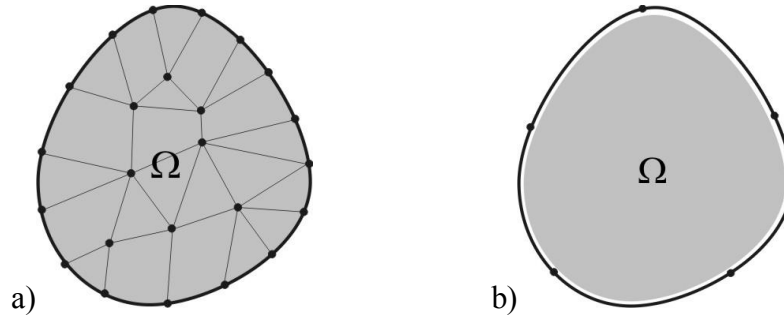
Analizując powyższe wyrażenia (2,4), wyraźnie widać, że pojawia się konieczność obliczania całek po obszarze. W związku z tym jednym z ważniejszych etapów badań, których rezultaty zawarte są w tej pracy, jest przetestowanie przedstawionej metody oraz opracowanie i zweryfikowanie efektywnego sposobu obliczania wspomnianych całek.

3. OBLICZANIE CAŁEK PO OBSZARZE

Z [1] wynika, że obok bezpośredniego obliczania całek po obszarze można rozwiązać to zagadnienie w inny sposób. Istnieje możliwość zastąpienia całki obszarowej całką brzegową, co jednak nie jest zawsze możliwe a zatem mało uniwersalne. Obliczanie całki po obszarze jest często zadaniem kłopotliwym, dlatego też np. w MEB [1] związane jest z podziałem obszaru Ω na mniejsze podobszary o założonym kształcie (trójkątnym lub czworokątnym), na których całkowanie jest prostsze i traktowaniu obliczanej całki jako sumy całek po poszczególnych „komórkach” (rys.1a). Automatycznie dyskwalifikuje to metodę MEB jako bazującą jedynie na dyskretyzacji brzegu, co było jej główną zaletą.

Główną ideą PURC było pozbycie się dyskretyzacji zarówno obszaru, jak i brzegu. W przypadku niektórych liniowych zagadnień brzegowych ta idea została zrealizowana i z powodzeniem zastosowana do rozwiązywania szeregu zadań modelowanych równaniami Laplace'a, Naviera-Lamego czy Helmholtza [4,5]. Powstawało więc pytanie, czy istnieje sposób, aby i w tych przypadkach, gdzie wymagane jest obliczanie całek obszarowych, uniknąć konieczności dzielenia obszaru na mniejsze części. Innymi słowy, poszukiwano techniki, która pozwoliłaby na traktowanie obszaru całkowania w sposób globalny.

Wstępne założenia takiej techniki zostały opracowane i zaprezentowane w [6] w odniesieniu do rozwiązywania liniowego równania różniczkowego Poissona. Zastosowanie techniki globalnego traktowania obszaru w całce obszarowej stało się możliwe dzięki dwóm czynnikom: możliwości modelowania całego obszaru za pomocą płatów powierzchniowych (rys.1b) znanych z grafiki komputerowej [2] oraz wyliczania całki po tak zdefiniowanym obszarze za pomocą kwadratur numerycznych wysokiego rzędu.



Rys. 1. Sposób traktowania obszaru w: a) MEB, b) PURC

W pracy do modelowania obszaru zaproponowano użycie czworokątnych powierzchniowych, ale płaskich płatów Béziera stopnia pierwszego i trzeciego. Taki sposób modelowania jest bardzo efektywny, gdyż odbywa się ono z wykorzystaniem niewielkiej liczby punktów: w przypadku płatów stopnia pierwszego – jedynie narożnych, zaś w przypadku płatów stopnia trzeciego – czterech punktów kontrolnych w ramach każdego segmentu. Bardzo ważną zaletą takiego podejścia jest fakt łatwej modyfikacji tak zdefiniowanego obszaru. Otóż zmiana położenia dowolnego punktu owocuje modyfikacją całego obszaru i co najważniejsze, ta modyfikacja dokonuje się bezpośrednio w PURC, gdyż zdefiniowany za pomocą płatów obszar jest uwzględniony w jego formalizmie matematycznym.

4. ANALIZA ROZWIĄZAŃ

Ostatecznej weryfikacji proponowanego podejścia dokonano, rozwiązując za pomocą PURC zagadnienie brzegowe zamodelowane nieliniowym równaniem różniczkowym postaci [3]

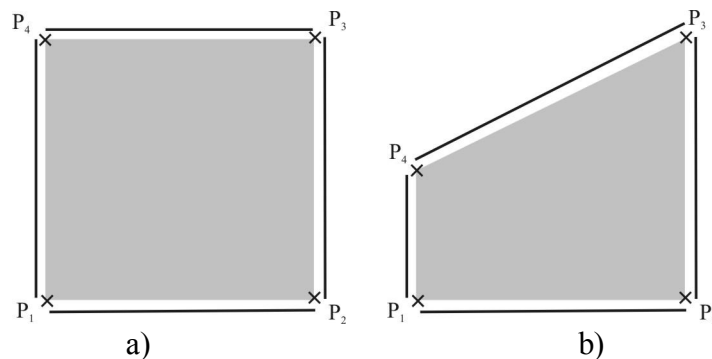
$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + \varepsilon u^3 = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5)$$

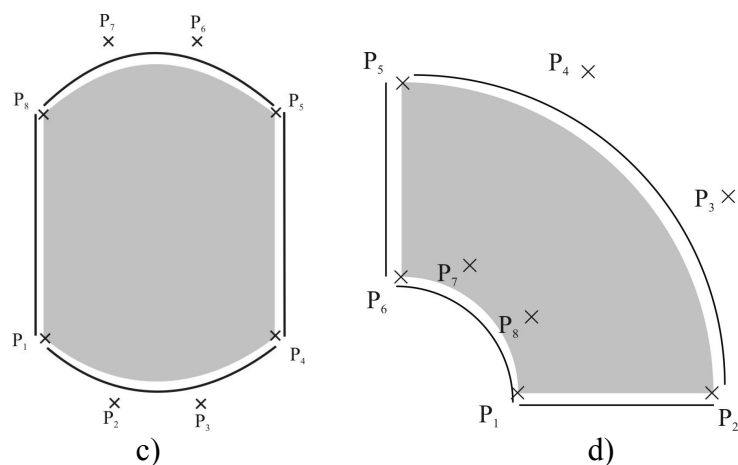
Jeśli rozpatrzono obszar kwadratowy 1×1 zaprezentowany na rys. 1a. zdefiniowany za pomocą prostokątnego płatu powierzchniowego Béziera pierwszego stopnia. Znane jest rozwiązanie analityczne

$$u = -\frac{1}{12}(x_1^3 + x_2^3) + \frac{3}{10}(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1), \quad (6)$$

oraz postać funkcji p

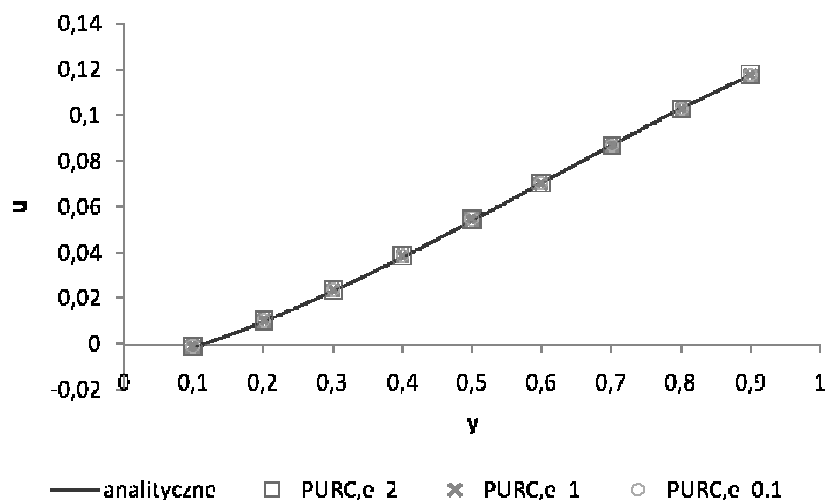
$$p = \varepsilon \left\{ -\frac{1}{12}(x_1^3 + x_2^3) + \frac{3}{10}(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1) \right\}^3 + \frac{x_1 + x_2}{10}. \quad (7)$$





Rys.2. Rozpatrywany obszar

Rozwiązano zagadnienie Dirichleta i zbadano rozwiązania otrzymane w przekroju pionowym przechodzącym przez środek obszaru. Do obliczeń przyjęto różne wartości stałej $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$ oraz $\varepsilon = 0.1$. Uzyskane rezultaty zaprezentowano na rys.3.

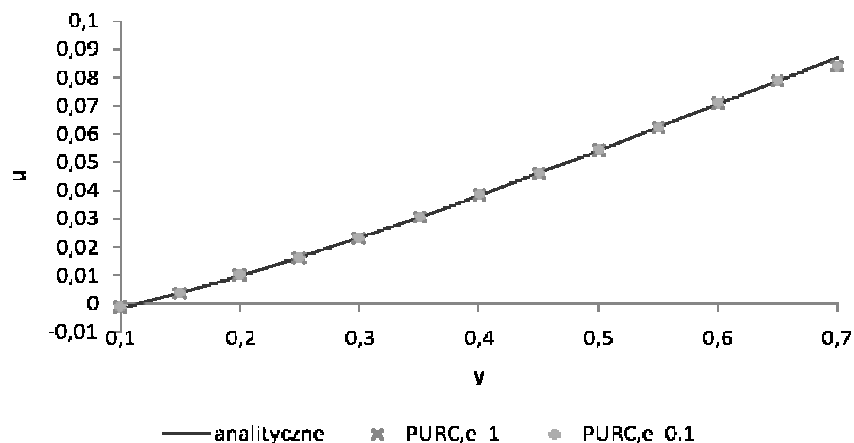


Rys.3. Rozwiązania numeryczne i analityczne w badanym przekroju

Analizując wyniki zamieszczone na rys.3, można stwierdzić, że uzyskane za pomocą PURC i proponowanego podejścia rozwiązania pozostają w dużej zgodności z analitycznymi (biorąc pod uwagę różne wartości ε). Powstaje jednak pytanie, jakie będzie rozwiązanie dla bardziej złożonego kształtu brzegu, gdy do zdefiniowania obszarów zastosuje się ponownie czworokątne płaskie płyty powierzchniowe Béziera, a także jaka będzie dokładność otrzymywanych rezultatów, jeśli do wyliczania całek po zmodyfikowanych obszarach użyte zostaną współczynniki prostokątnej kwadratury Gaussa-Legendre'a.

W celu udzielenia odpowiedzi na postawione pytania dokonano różnych modyfikacji (rys.2b,c,d) bazowego obszaru kwadratowego (rys.2a) i rozwiązano w tych obszarach to samo nieliniowe równanie różniczkowe. Pierwszy rozpatrzono obszar zmodyfikowany poprzez przesunięcie jednego punktu narożnego P_4 , zdefiniowany czworokątnym płaskim płatem Béziera pierwszego stopnia (rys.2b).

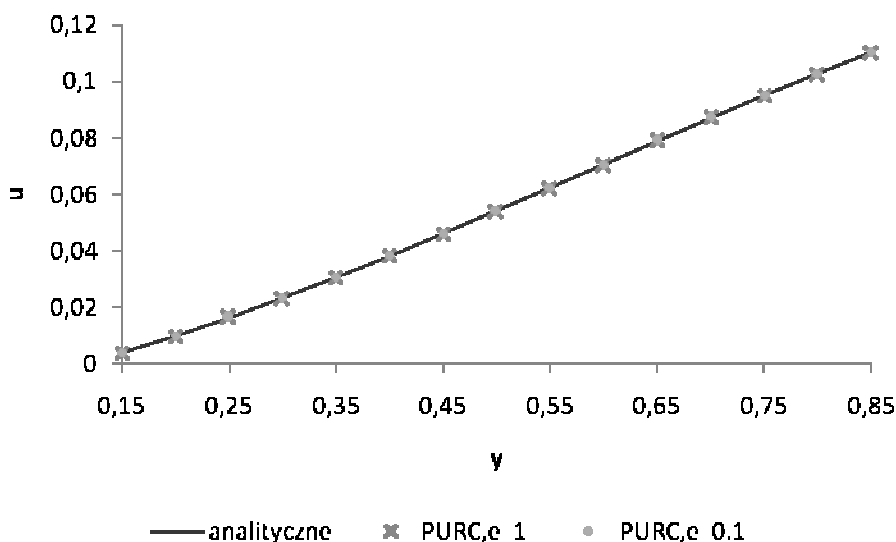
Opisana w pracy procedura została automatycznie zastosowana także i w tym przypadku, a uzyskane na jej bazie rozwiązania przechodzące przez środek badanego obszaru zamieszczono na rys.4.



Rys.4. Rozwiązania numeryczne i analityczne w badanym przekroju

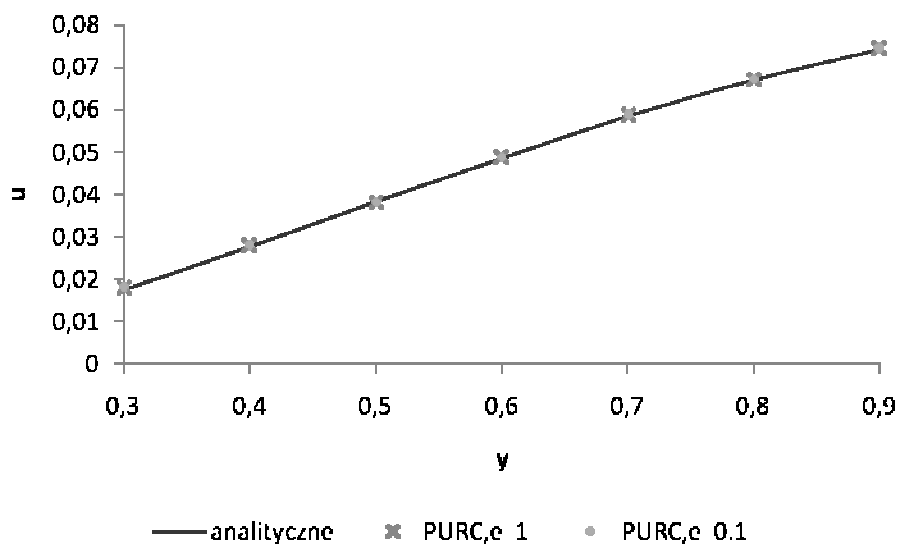
Ponownie wyraźnie widać, że uzyskane rezultaty numeryczne są zgodne z analitycznymi. Ponadto taka sama wysoka dokładność charakteryzuje rozwiązania uzyskane, jeśli weźmie się pod uwagę różne wartości stałej ε . Niewielkim błędem (ok. 3%) obarczone jest jedynie rozwiązanie uzyskane w ostatnim badanym punkcie przekroju, co wynika z faktu, iż punkt ten leży przy samym brzegu rozpatrywanego obszaru.

Dwa kolejne rozważone przypadki dotyczą takiej modyfikacji geometrii bazowej, że obszar należy zdefiniować czworokątnym płatem płaskim stopnia trzeciego. Wynika to z faktu, że niektóre z boków rozpatrywanego wielokąta zostaną przekształcone do postaci krzywoliniowej. I tak początkowe punkty kontrolne krzywej modelującej górny i dolny segment bazowego obszaru kwadratowego zostaną przesunięte wzdłuż osi pionowej, co spowoduje rozciągnięcie obszaru do kształtu zaprezentowanego na rys.2c. Wyniki dla tak zdefiniowanego zagadnienia w przekroju $x = 0.5$ zamieszczono na rys.5.



Rys. 5. Rozwiązania numeryczne i analityczne w badanym przekroju

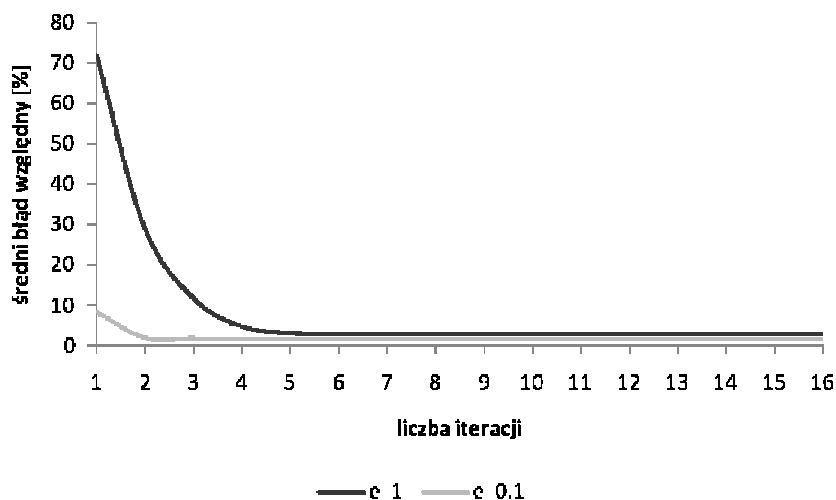
Wreszcie bazowy kształt zmodyfikowano w sposób zaprezentowany na rys.2d. Do zamodelowania obszaru użyto płata czworokątnego Beziera trzeciego stopnia. Ponownie rozwiązano rozpatrywane zagadnienie i uzyskane rezultaty zaprezentowano na rys.6.



Rys. 6. Rozwiązania numeryczne i analityczne w badanym przekroju

Wyniki zamieszczone na rys.5 zdają się potwierdzać poprawność zastosowanego podejścia, gdyż ponownie uzyskano rezultaty bardzo zbliżone do analitycznych (średni błąd względny w badanym przekroju dla obu wartości stałej ε wyniósł około 0.3%).

Powstaje jeszcze pytanie: jak efektywny jest sam proces iteracyjny rozwiązywania rozpatrywanego w pracy zagadnienia, a dokładnie - jak szybko jest zbieżny do rozwiązania ostatecznego. W odpowiedzi na to pytanie zamieszczono wykres (rys.7), na którym zaprezentowano wartości średniego błędu względnego uzyskanego w badanym przekroju w kolejnych iteracjach. Wzięto pod uwagę dane uzyskane z przypadku bazowego w 16 iteracjach. Ponownie rozpatrzono rozwiązania otrzymane dla $\varepsilon = 1$ oraz $\varepsilon = 0.1$.



Rys. 7. Zbieżność procesu iteracyjnego

Jak widać na rys.7 proces iteracyjny już w 3 (dla $\varepsilon = 0.1$) i 6 (dla $\varepsilon = 1$) iteracji jest zbieżny do rozwiązania ostatecznego. Można więc stwierdzić, że zastosowany proces iteracyjny działa

prawidłowo, jest dosyć szybko zbieżny do rozwiązania ostatecznego, a na szybkość zbieżności ma wpływ wartość stałej ε (im większa tym większa liczba iteracji).

5. WNIOSKI

Okazało się, że technika globalnego obliczania całek po obszarze w PURC modelowanym za pomocą płaskich pól powierzchniowych jest słuszną i obiecującą. Stabilność i dokładność wyliczanych na podstawie prostokątnej kwadratury Gaussa całek dla przetestowanych przykładów jest niezależna od modyfikowania kształtu pól czworokątnych, za pomocą których definiowany jest obszar. Zaproponowany sposób rozwiązywania nieliniowych zagadnień brzegowych okazał się dawać obiecujące rezultaty: dokładne rozwiązania w dosyć szybko zbieżnym procesie iteracyjnym. Otrzymywane wyniki są zachęcające do rozpoczęcia badań nad zastosowaniem koncepcji do rozwiązywania nieliniowych zagadnień teorii sprężystości i innych.

LITERATURA

1. Becker A. A.: The boundary element method in engineering: a complete course. London : McGraw-Hill, 1992.
2. Foley J. D.: Wprowadzenie do grafiki komputerowej. Warszawa : WNT, 2001.
3. Zhu T., Zhang J., Atluri N.: A meshless local boundary integral equation (LBIE) method for solving nonlinear problems. "Computational Mechanics" 1998, 22, p.174-186.
4. Zieniuk E.: Bézier curves in the modification of boundary integral equations (BIE) for potential boundary-values problems."International Journal of Solids and Structures" 2003, 40 (9), p. 2301-2320.
5. Zieniuk E., Bołtuć A.: Non-element method of solving 2D boundary problems defined on polygonal domains modeled by Navier equation. "International Journal of Solids and Structures" 2006, 43, p. 7939-7958.
6. Zieniuk E., Szerszeń K., Bołtuć A.: Globalne obliczanie całek po obszarze w PURC dla dwuwymiarowych zagadnień brzegowych modelowanych równaniem Naviera-Lamego i Poissona. „Modelowanie Inżynierskie” 2007, t. 2, nr 33, s.181-186.
7. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.: The finite element method. London : McGraw- Hill, 1977.

PIES IN SOLVING NONLINEAR TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY PROBLEMS

Summary. The paper presents an effective approach to solving nonlinear boundary problems and its initial verification. As a source of nonlinearity we have chosen a differential equation which model considered problems. A success of a presented idea is made by: using PIES method (which was successfully used for solving of linear problems), a proposed effective way of domain integrals computation and finally an effective way of definition of used domains.