

MODELOWANIE PĘKNIĘCIA WZDŁUŻNEGO W BELCE ZGINANEJ

LESZEK MAJKUT

*Katedra Mechaniki i Wibroakustyki, Akademia Górniczo - Hutnicza
e-mail: majkut@agh.edu.pl*

Streszczenie. W pracy opisano budowę modelu belki z pęknięciem wzdluznym, prostoliniowym. Zastosowanie proponowanego modelu ograniczone jest do pierwszej częstości drgań własnych, a w przypadku drgań wymuszonych do częstości poniżej drugiej częstości drgań własnych. Weryfikacji modelu dokonano poprzez porównanie pierwszych częstości drgań własnych wyznaczonych MES i proponowanego modelu dla różnych głębokości, długości i położenia pęknięcia.

1. WSTĘP

Badanie procesów dynamicznych obiektów rzeczywistych może być kosztowne, czasochłonne lub w pewnych sytuacjach niemożliwe, natomiast eksperymenty można w prosty sposób przeprowadzić na modelach, stosując je do symulacji zachowań dynamicznych. W tym celu należy zbudować model fizyczny i matematyczny obiektu, po czym przeprowadzić estymację parametrów modelu oraz jego weryfikację [5].

Praca dotyczy modelowania pęknięć wzdluznych elementów konstrukcyjnych, których modelem może być prostoliniowa belka. Taki rodzaj uszkodzenia elementu następuje w pewnych przypadkach obciążeń gigacyklowych elementu [12], jest to również model delaminacji w kompozytach warstwowych [4]. Modelowanie takiego uszkodzenia belki ma na celu poszukiwanie symptomów uszkodzenia elementu.

Klasyczne metody diagnostyki nieinwazyjnej oparte na metodach: magnetycznych, prądów wirowych czy metodach prozkowych nie pozwalają na diagnostykę analizowanych pęknięć wzdluznych w belce. Metody te stosuje się tylko w przypadkach braku ciągłości struktury, a więc do pęknięć poprzecznych, krawędziowych [1]. Metody ultradźwiękowe polegają głównie na pomiarze fal powierzchniowych, które zanikają eksponentalnie wraz z głębokością, ich stosowanie jest więc również ograniczone do pęknięć o niewielkiej głębokości.

W przypadku pęknięć wzdluznych najlepszą więc metodą diagnostyki jest diagnostyka wibroakustyczna. Przy diagnostyce według modelu [7] niezbędny jest model analizowanego zjawiska, który pozwala m.in. na wyznaczenie modelu odwrotnego [2,3] i, co za tym idzie, identyfikację stanu obiektu [9].

Weryfikacji zaproponowanego modelu dokonano poprzez porównanie pierwszych częstości drgań własnych wyznaczonych MES dla różnych głębokości, długości i położenia pęknięcia.

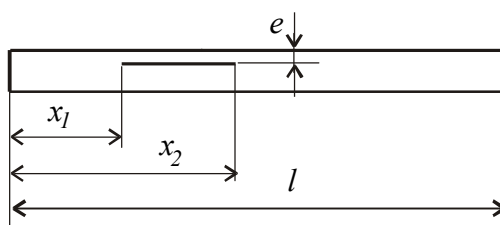
Ostachowicz i inni w pracy [13] do opisu belki z delaminacją wykorzystują elementy spektralne, co pozwala na analizę rozchodzenia się fal o wysokiej częstotliwości, co autorzy wykorzystują do diagnostyki uszkodzeń typu delaminacja w belkach zginanych. Podobnie Ishak i inni [6] opisują sposób modelowania pęknięcia wzdluznego, który pozwala na analizę

przebiegów drgań belki o nieskończonej długości, w kilku pierwszych milisekundach po przyłożeniu siły impulsowej.

Zastosowanie opisywanych tam modeli ogranicza się do analizy drgań wymuszonych, dodatkowo wykorzystanie metody opisanej w [6] do wyznaczenia amplitud wymuszonych belki o skończonej długości prowadzi do błędnych wyników w porównaniu z wynikami symulacji MES.

2. OPIS PROBLEMU

Przedmiotem pracy jest opis modelowania pęknięcia, wykorzystywanego do analizy drgań i wibroakustycznej diagnostyki według modelu [8]. Model ten wykorzystać można do analizy wpływu pęknięcia na drgania własne i wymuszone belki oraz do diagnostyki stanu technicznego elementu (identyfikacji pęknięć) [9, 10, 11]. W rozważaniach przyjęto belkę o stałym przekroju o stałym prostokątnym przekroju poprzecznym, polu powierzchni A , wysokości h i grubości b oraz momencie bezwładności przekroju I . Rozpatrywany w pracy problem opisany został modelem belki Bernoullego - Eulera (tzw. techniczne równanie drgań). Analizowaną w pracy belkę z pęknięciem wzdłużnym pokazano na rys. 1.

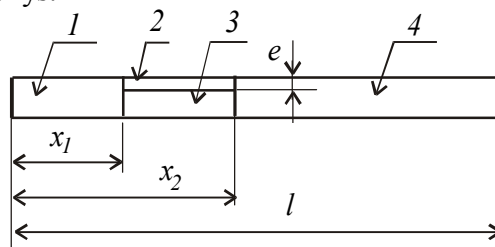


Rys.1. Model fizyczny belki z pęknięciem wzdłużnym

Na rys.1 przez l oznaczono długość belki, przez e – głębokość pęknięcia, x_1 i x_2 odpowiednio początek i koniec pęknięcia, w pracy wykorzystywana jest również długość pęknięcia $d = x_2 - x_1$.

3. MODEL „DWUBELKOWY” PĘKNIĘCIA

W celu wyznaczenia modelu matematycznego autor proponuje, by pęknięty element podzielić na cztery podukłady: 1 - dla $x \in \langle 0, x_1 \rangle$, 4 - dla $x \in \langle x_2, l \rangle$. Pęknięty odcinek $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, podzielono na dwa podukłady 2 i 3 (stąd nazwa – model dwubelkowy), jeden z nich o wysokości równej głębokości pęknięcia e drugi o wysokości $h - e$. Proponowany podział pokazano schematycznie na rys.2



Rys.2. Dwubelkowy model pęknięcia

Każdy podukład opisano równaniami różniczkowymi drgań, wynikającymi z przyjętego modelu Bernoullego – Eulera belki.

Równania różniczkowe drgań belki mają postać;

- dla $x \in \langle 0, x_1 \rangle$ opisane funkcją $y_1(x, t)$ i $x \in \langle x_2, l \rangle$ opisane funkcją $y_4(x, t)$

$$EI \frac{\partial^4 y_i(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_i(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 4 \quad (1)$$

- dla $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$

$$EI_2 \frac{\partial^4 y_2(x, t)}{\partial x^4} + \rho A_2 \frac{\partial^2 y_2(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (2)$$

$$EI_3 \frac{\partial^4 y_3(x, t)}{\partial x^4} + \rho A_3 \frac{\partial^2 y_3(x, t)}{\partial t^2} = -q(x, t) \quad (3)$$

gdzie : $q(x, t)$ jest obciążeniem wewnętrznym na kierunku normalnym, pomiędzy elementami 2 i 3 na odcinku pęknięcia.

W proponowanym modelu zakłada się, że belki 2 i 3 mają identyczne przemieszczenia poprzeczne i nie mają żadnych przeszkód w swobodnym ślizganiu się po sobie w kierunku osi belki (siły tarcia zostały pominięte).

Identyczność przemieszczeń poprzecznych oznacza, że $y_2(x, t) = y_3(x, t)$. Po wprowadzeniu funkcji $y_2(x, t)$ do równania (3) i dodaniu stronami równań (2) i (3), równanie drgań belki na pękniętym odcinku zapisać można w postaci:

$$E(I_2 + I_3) \frac{\partial^4 y_2}{\partial x^4} + \rho(A_2 + A_3) \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

W pracy [6] momenty bezwładności I_2 i I_3 liczone są względem osi obojętnych belek odpowiednio 2 i 3. To właśnie założenie prowadzi zdaniem autora do błędnych wyników przy analizie drgań belki o skończonych wymiarach.

3.1. Wyznaczenie momentów bezwładności pola przekroju

Jak zaznaczono w poprzednim punkcie pracy, modelowanie, w którym momenty bezwładności I_2 i I_3 wyznaczone są względem osi obojętnych belek odpowiednio 2 i 3, nie daje poprawnych wyników analizy drgań belki z pęknięciem wzłużnym. Warto zauważyć, że element pokazany na rys.2 drga względem jednej osi neutralnej. Momenty bezwładności powinny być więc wyznaczone względem tej osi.

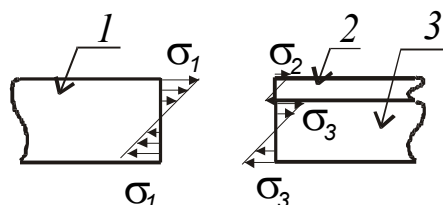
W takiej sytuacji suma $I_2 + I_3$ (z rów. 4), po przekształceniach wynosi:

$$I_2 + I_3 = \frac{bh^3}{12} = I \quad (5)$$

Z takiego rozwiązania wynika, że przy założeniu o równości przemieszczeń obu belek na pękniętym odcinku elementu ($y_2(x, t) = y_3(x, t)$) pęknięcie nie ma wpływu na drgania elementu (rów. (1) i (4) mają w takim przypadku identyczną postać).

3.2. Ciągłość naprężeń

Kolejnym czynnikiem, który należy uwzględnić przy modelowaniu dwubelkowym pęknięcia wzdłużnego elementu jest rozkład naprężeń wyznaczonych z takiego modelu. Na rys.3 pokazano rozkład naprężeń na początku pęknięcia (wsp. x_1 belki). Nieciągłość naprężeń w tym, jak również w przekroju x_2 wynika z przyjętego modelu pęknięcia.



Rys.3. Rozkład naprężeń normalnych, pochodzących od zginania w przekroju x_1

W celu zapewnienia ciągłości naprężeń (równości wartości maksymalnych) autor proponuje wprowadzenie i uwzględnienie w analizie sił osiowych (wzdłużnych) działających na odcinku pęknięcia w elemencie.

Siły N_2 i N_3 działające odpowiednio na belkę 2 i 3 modelu dwubelkowego pęknięcia wyznacza się z ciągłości (równości) maksymalnych naprężeń normalnych i tak:

$$\sigma_1^g = \sigma_2^g + \frac{N_2}{A_2} \quad \sigma_1^g = \sigma_3^g + \frac{N_3}{A_3}$$

indeks g oznacza, że są to naprężenia pochodzące od zginania.

Tak zdefiniowane siły wzdłużne N_2 i N_3 wyznaczyć można z zależności:

$$N_2 = A_2 \left(\frac{M_{g1}(x_1)}{W_{g1}} - \frac{M_{g2}(x_1)}{W_{g2}} \right) \quad (6)$$

$$N_3 = A_3 \left(\frac{M_{g1}(x_1)}{W_{g1}} - \frac{M_{g3}(x_1)}{W_{g3}} \right) \quad (7)$$

gdzie: $M_{g1}(x_1)$ – wartość momentu gnącego na końcu przedziału l pękniętego elementu (rys.2), $M_{g2}(x_2)$ i $M_{g3}(x_3)$ – wartości momentów gnących wyznaczonych, odpowiednio w belce 2 i 3 pękniętego elementu, w przekroju o współrzędnej $x = x_1$, W_{gi} – wskaźnik wytrzymałości na zginanie i -tej belki, $i = 1,2,3$.

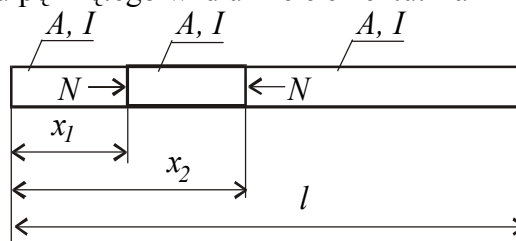
Podobne zależności napisać można również dla przekroju x_2 pękniętego elementu, z tym, że siły N_2 wyznaczone w przekrojach x_1 i x_2 , muszą leżeć na jednej prostej, mieć jednakowe wartości i przeciwne zwroty. Ta sama uwaga dotyczy siły N_3 .

Taki model pęknięcia w belce wykorzystać można jedynie przy analizie drgań wymuszonych, ze względu na to, że tylko w takim przypadku możliwe jest wyznaczenie wartości amplitud momentów gnących w przekrojach x_1 i x_2 . Innym, opisanym w następnym punkcie pracy, rozwiązaniem problemu analizy drgań pękniętej wzdłużnie belki jest budowa modelu zastępczego.

4. MODEL ZASTĘPCZY PĘKNIĘTEJ WZDŁUŻNIE BELKI

W efekcie przyjęcia założenia o równości przemieszczeń poprzecznych obu belek modelujących pęknięcie, tzn. $y_2(x,t) = y_3(x,t)$, drgania belki na pękniętym odcinku opisuje równanie (4). Jest to równanie (uwzględniając rów.(5)) belki o stałym przekroju poprzecznym A i stałym momencie bezwładności I .

Opierając się na powyższym wniosku oraz analizie ciągłości naprężeń, autor proponuje budowę zastępczego modelu pękniętego wzdluznie elementu. Taki model pokazano na rys. 4.



Rys.4. Model zastępczy pękniętego wzdluznie elementu

W proponowanym modelu element ma stałe pole przekroju A i moment bezwładności pola I na całej swej długości, pęknięcie uwzględniane jest poprzez wprowadzenie siły N na długości pęknięcia.

W przypadku poszukiwania częstości drgań własnych wykorzystanie zależności (6) i (7), w celu znalezienia siły N , staje się niemożliwe, ze względu na brak możliwości określenia wartości momentu gnącego. Moment gnący zależy od stałych całkowania, tych zaś nie można określić jednoznacznie, wyznaczyć można jedynie zależności pomiędzy nimi.

W takim przypadku siłę wzdluzną zidentyfikować można na podstawie wartości częstości drgań własnych wyznaczonych dla kilku wartości długości pęknięcia $d = x_2 - x_1$, dla jednej założonej głębokości pęknięcia.

4.1. Identyfikacja siły wzdluznej

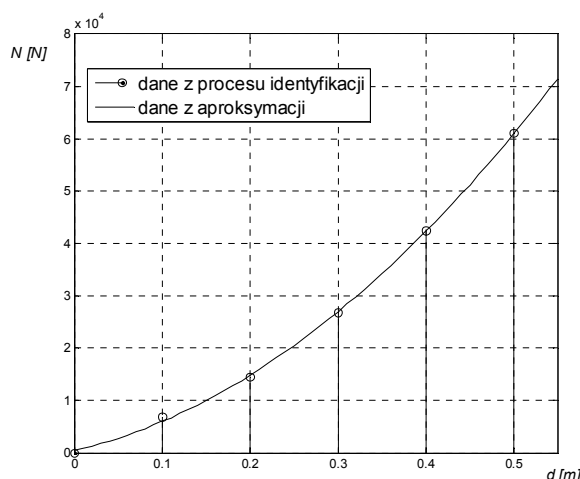
W celu identyfikacji siły wzdluznej przeprowadzono symulacje z wykorzystaniem MES pękniętej wzdluznie belki wspornikowej. Belkę modelowano z wykorzystaniem elementów płytowych, pęknięcie modelowano poprzez nieciągłość materiału na modelowanej długości pęknięcia [4]. Do obliczeń przyjęto belkę o danych materiałowych: moduł Younga $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa; gęstość materiału $\rho = 7860$ kg/m³ i geometrycznych: przekrój poprzeczny $b \times h = 0.04 \times 0.04$ m; długość belki $l = 1.2$ m. Do obliczeń numerycznych wykorzystano oprogramowanie pakietu ANSYS, belkę modelowano z wykorzystaniem 480 elementów typu Shell63 i 624 węzłów, tzn. analizowany układ miał 3744 stopni swobody.

Wartości częstotliwości drgań własnych wraz ze zidentyfikowanymi na ich podstawie siłami wzdluznymi zamieszczono w tab.1

Tabela 1. Wartości zidentyfikowanej siły wzdluznej

| x_1 [m] | d [m] | e | f_1 [Hz] | N [N] |
|-----------|---------|-------|------------|---------|
| 0.40 | 0.1 | $h/2$ | 23.184 | 6800 |
| 0.40 | 0.2 | $h/2$ | 23.146 | 14500 |
| 0.40 | 0.3 | $h/2$ | 23.015 | 26700 |
| 0.40 | 0.4 | $h/2$ | 22.758 | 42400 |
| 0.40 | 0.5 | $h/2$ | 22.371 | 61100 |

Zmianę siły wzdłużnej N w funkcji długości pęknięcia pokazano na rys. 5, wartości z tabeli 1 oznaczono przez „o”.



Rys.5 Zmiana siły wzdłużnej w funkcji długości pęknięcia

Na podstawie obserwacji danych pokazanych na rys.5 zaproponowano, by zmianę siły wzdłużnej N , w funkcji długości pęknięcia d aproksymować funkcją w postaci:

$$N(d) = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 \quad (8)$$

Stałe a_i wyznaczono z wykorzystaniem analizy regresji liniowej i dla analizowanego przypadku wynoszą one odpowiednio: $a_0 = 375.0$ [N], $a_1 = 39\,589.3$ [N/m], $a_2 = 163\,392.9$ [N/m²]. Wyniki aproksymacji pokazano na rys.5 (linia ciągła).

5. WERYFIKACJA MODELU

Weryfikacji modelu dokonano poprzez porównanie częstości drgań własnych belki o różnych położeniach, długościach i głębokościach pęknięcia. Wyniki porównania częstości własnych wyznaczonych metodą elementów skończonych ω_{MES} i z wykorzystaniem proponowanego modelu zamieszczono w tabelach 2 i 3.

Błąd względny wyznaczono z zależności:

$$\delta\omega = \frac{|\omega_{\text{mod}} - \omega_{MES}|}{\omega_{MES}} \cdot 100 \% \quad (9)$$

W każdym przypadku weryfikacji identyfikację siły wzdłużnej przeprowadzono, jak to opisano w punkcie 4.1, przy modelowaniu pęknięcia na głębokości $e = h/2$. W tabeli 2 zebrano wyniki weryfikacji dla pęknięcia na tej samej głębokości co przy identyfikacji siły wzdłużnej.

W tabeli 3 pęknięcia modelowane są na innych głębokościach ($h/3$ i $h/4$). W celu wyznaczenia częstości drgań własnych belki z pęknięciem na innej głębokości niż ta, dla której dokonano identyfikacji, zaproponowano modyfikację siły wzdłużnej N . Siła N wynika z analizy ciągłości naprężeń w przekrojach z pęknięciem, naprężenia pochodzące od zginania zmieniają się liniowo w funkcji wysokości belki, stąd hipoteza o liniowej zależności siły N w funkcji głębokości pęknięcia. Wg przyjętej hipotezy siła N ma wartość maksymalną dla pęknięcia w połowie wysokości belki i zmienia się liniowo do wartości równej zero przy głębokości pęknięcia zmierzającej do zera.

Tabela 2. Wyniki weryfikacji modelu

| x_l [m] | d [m] | e | $\delta \omega$ [%] |
|-----------|---------|-------|---------------------|
| 0.10 | 0.05 | $h/2$ | 0.0431 |
| 0.10 | 0.15 | $h/2$ | 0.1642 |
| 0.10 | 0.25 | $h/2$ | 0.5699 |
| 0.10 | 0.35 | $h/2$ | 1.2972 |
| 0.10 | 0.45 | $h/2$ | 2.3032 |
| 0.40 | 0.10 | $h/2$ | 0.0129 |
| 0.40 | 0.20 | $h/2$ | 0.0173 |
| 0.40 | 0.30 | $h/2$ | 0.0131 |
| 0.40 | 0.40 | $h/2$ | 0.0044 |
| 0.40 | 0.50 | $h/2$ | 0.0045 |
| 0.90 | 0.10 | $h/2$ | 0.0043 |
| 0.90 | 0.15 | $h/2$ | 0.0259 |
| 0.90 | 0.20 | $h/2$ | 0.0604 |
| 0.90 | 0.25 | $h/2$ | 0.0950 |

Tabela 3. Wyniki weryfikacji modelu

| x_l [m] | d [m] | e | $\delta \omega$ [%] | x_l [m] | d [m] | e | $\delta \omega$ [%] |
|-----------|---------|-------|---------------------|-----------|---------|-------|---------------------|
| 0.10 | 0.10 | $h/3$ | 0.0647 | 0.10 | 0.05 | $h/4$ | 0.0388 |
| 0.10 | 0.20 | $h/3$ | 0.2510 | 0.10 | 0.15 | $h/4$ | 0.0993 |
| 0.10 | 0.30 | $h/3$ | 0.6536 | 0.10 | 0.25 | $h/4$ | 0.2728 |
| 0.10 | 0.40 | $h/3$ | 1.2799 | 0.10 | 0.35 | $h/4$ | 0.5665 |
| 0.10 | 0.50 | $h/3$ | 2.0745 | 0.10 | 0.45 | $h/4$ | 0.9558 |
| 0.40 | 0.10 | $h/3$ | 0.0129 | 0.40 | 0.10 | $h/4$ | 0.0173 |
| 0.40 | 0.20 | $h/3$ | 0.0216 | 0.40 | 0.20 | $h/4$ | 0.0259 |
| 0.40 | 0.30 | $h/3$ | 0.0478 | 0.40 | 0.30 | $h/4$ | 0.0997 |
| 0.40 | 0.40 | $h/3$ | 0.0790 | 0.40 | 0.40 | $h/4$ | 0.2094 |
| 0.40 | 0.50 | $h/3$ | 0.1110 | 0.40 | 0.50 | $h/4$ | 0.3386 |
| 0.80 | 0.10 | $h/3$ | 0.0086 | 0.90 | 0.10 | $h/4$ | 0.0216 |
| 0.80 | 0.15 | $h/3$ | 0.0648 | 0.90 | 0.15 | $h/4$ | 0.0043 |
| 0.80 | 0.20 | $h/3$ | 0.1023 | 0.90 | 0.20 | $h/4$ | 0.0129 |
| 0.80 | 0.25 | $h/3$ | 0.1513 | 0.90 | 0.25 | $h/4$ | 0.0259 |

6. PODSUMOWANIE

W pracy zaproponowano budowę modelu pęknięcia wzdłużnego elementu konstrukcyjnego, którego modelem jest prostoliniowa belka. W proponowanym modelu założono, że oba sektory belki na odcinku pęknięcia mają takie same przemieszczenia poprzeczne. Założenie to ogranicza zastosowanie proponowanego modelu do wyznaczenia pierwszej częstości drgań własnych, a w przypadku drgań wymuszonych do częstości wymuszenia o wartości mniejszej od drugiej częstości drgań własnych.

Sposób wyznaczenia siły wzdłużnej ogranicza stosowanie proponowanego modelu do analizy stanów ustalonych (częstości drgań własnych, wektorów własnych, wektorów drgań wymuszonych).

Po wyznaczeniu siły wzdłużnej dla dowolnie wybranej głębokości i kilku wybranych długości wykorzystać ją można do wyznaczenia pierwszej częstości drgań własnych i amplitud

drgań wymuszonych dla innego, dowolnego położenia pęknięcia (głębokości, położenia i długości). Weryfikacji modelu dokonano poprzez porównanie pierwszych częstości drgań własnych wyznaczonych MES i proponowanego modelu dla różnych głębokości, długości i położenia pęknięcia. Wyniki weryfikacji zawarte w tabelach 2 i 3 wskazują na poprawność proponowanego modelu.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2007-2010 jako projekt badawczy: nr N 504 042 32/3443

LITERATURA

1. Adams D.: Health monitoring of structural materials and components: methods with applications. Willey 2007.
2. Cholewa W.: Modele odwrotne i modelowanie diagnostyczne. „Diagnostyka” 2004, 30, s. 111-114.
3. Cholewa W., Kiciński J.: Diagnostyka techniczna: metody odwracania nieliniowych modeli obiektu. Gliwice: Wyd. Kat. Podstaw Konstrukcji Maszyn, 2001.
4. Doliński Ł.: Porównanie wybranych modeli delaminacji w kompozytach warstwowych, „Modelowanie Inżynierskie” 2006, 32, s. 113-118.
5. Giergiel, J, Uhl, T.: Identyfikacja układów mechanicznych. Warszawa : PWN, 1990.
6. Ishak S.I. Liu G.R. i Lim S.P.: Study on characterization of horizontal cracks in isotropic beams. „Journal of Sound and Vibration” 2000, 238(4), p. 661-671.
7. Kiciński J.: Model based diagnostics – today and tomorrow, „Diagnostyka” 2004, 30, p. 241-248.
8. Majkut L.: Wibroakustyczne symptomy pęknięcia belki. „Zagadnienia eksploatacji maszyn” 2005, 144, s. 165-181.
9. Majkut L.: Identyfikacja pęknięcia w belkach o znanych warunkach brzegowych „Diagnostyka” 2004, 32, s. 107-116.
10. Majkut L.: Identyfikacja pęknięcia w belkach na podstawie pomiaru częstości drgań własnych. Kwartalnik AGH „Mechanics” 2005, 24, z.1, s. 21-28.
11. Majkut L.: Identyfikacja pęknięcia na podstawie amplitud drgań wymuszonych. Kwartalnik AGH „Mechanics”, 24, z. 3, s. 199-204
12. Nowy F., Bokuva O.: Gigacycle fatigue at highfrequency loading. W: 7th International Seminar of Technical Systems Degradation. Liptowsky Mikulas 2008, p. 111-114
13. Ostachowicz W, Krawczuk M., Cartmell M., Gilchrist M.: Wave propagation in delaminated beam. “Computers and Structures” 2004, 82, p. 475–483

LENGHTWISE CRACK MODELLING IN A BEAM LIKE STRUCTURES

Summary. In work the new model of lenghtwise crack in a beam like structure is proposed. Application of the proposed model is limited to the first natural frequency determination and in case of forced vibration to the all frequency of excitation below the second natural frequency. Verification of the proposed model was done by comparison the natural frequency determined by FEM and from proposed model for different crack location, length and depth.