

MODEL KONSTITUTYWNY MATERIAŁU SMA Z LOCKINGIEM

WIESŁAW GRZESIKIEWICZ^{*}, ANDRZEJ WAKULICZ^{**}, ARTUR ZBICIAK^{***}

^{*}*Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych, Politechnika Warszawska*
e-mail: wgr@simr.pw.edu.pl

^{**}*Instytut Matematyczny PAN*
e-mail: a.wakulicz@impan.pl

^{***}*Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska*
e-mail: a.zbiciak@il.pw.edu.pl

Streszczenie. W pracy podano różniczkowy opisu związków konstytutywnych materiału SMA z lockingiem na podstawie zaproponowanego, oryginalnego schematu reologicznego. Wykorzystano relacje konstytutywne idealnego stopu SMA sformułowane we wcześniejszych pracach autorów, modyfikując schemat reologiczny poprzez dodanie elementu blokującego odkształcenia. Opisano szczegółowo metodę wyznaczenia tensora prędkości odkształceń niesprężystych.

1. WSTĘP

Materiał SMA, nazywany materiałem z pamięcią kształtu, po odkształceniu trwałym ma zdolność odzyskania pierwotnego kształtu pod wpływem ogrzania. Dodatkowo charakteryzuje się on specyficzną postacią wykresu ilustrującego zależność naprężenia od odkształcenia.

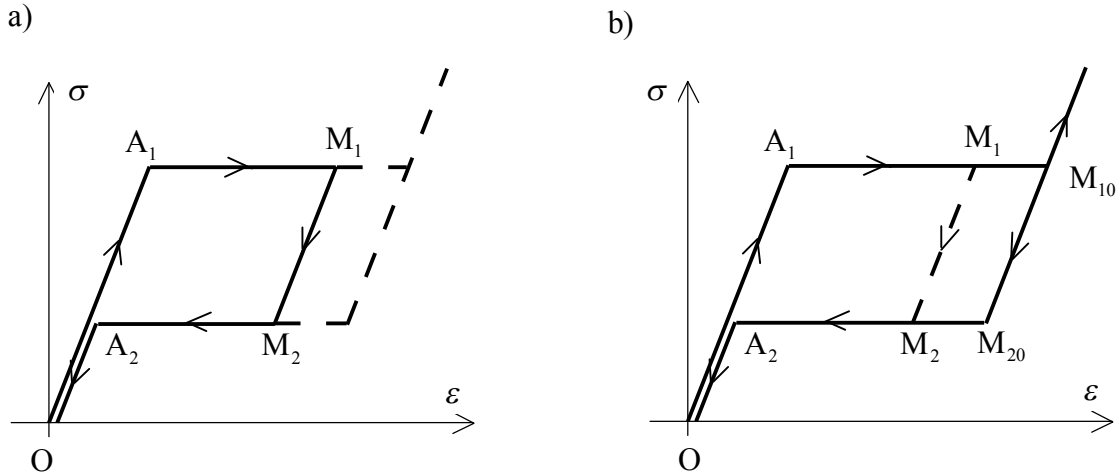
Wyniki badań procesów krystalograficznych, powstających w trakcie ogrzewania lub odkształcania próbek z materiałów SMA, są prezentowane w wielu pracach (Bojarski i Morawiec [3], Lammering i Schmidt [7], McNaney i in. [8], Otsuka i Ren [10], Pieczyńska [11], Ziółkowski [12]). W niniejszym opracowaniu zajmujemy się matematycznym opisem zależności stanu naprężenia od odkształcenia, czyli opisem konstytutywnych cech materiału SMA. Podstawę do sformułowania tego opisu stanowią wykresy ilustrujące wyniki badań doświadczalnych próbek materiału. Zasadnicze znaczenie dla naszych rozważań mają wykresy przedstawiające relację między naprężeniem i odkształceniem, uzyskiwane w trakcie jednoosiowego rozciągania próbki z materiału SMA w stałej temperaturze.

W opisie cech konstytutywnych SMA uwzględnimy zjawisko lockingu, które występuje w niektórych stopach z pamięcią kształtu. Zaproponujemy odpowiedni schemat reologiczny materiału i omówimy zagadnienia związane z algorytmem wyznaczenia tensora prędkości odkształceń niesprężystych.

2. REOLOGICZNY MODEL MATERIAŁU SMA

Podstawę do ustalenia reologicznego modelu stanowią rezultaty badań doświadczalnych próbek z materiału SMA. Zwykle są to próby jednoosiowego rozciągania. Na rys. 1 pokazano

wyidealizowane wykresy zależności naprężeń od odkształcenia uzyskane przy obciążaniu i odciążaniu.



Rys. 1. Schematyczne wykresy izotermicznego odciążania próbki SMA

- a) niepełna przemiana austenitu w martenzyt;
b) pełna przemiana austenitu w martenzyt

W trakcie obciążania określonym odcinkiem $A_1 - M_1$, w próbce SMA następuje przemiana austenitu w martenzyt, natomiast w czasie odciążania $M_2 - A_2$ zachodzi przemiana odwrotna. W czasie pełnego cyklu obciążenia $OA_1M_1M_2A_2O$ następuje dyssypacja energii, której miarą jest pole równoległoboku $A_1M_1M_2A_2$.

Model z niepełną przemianą martenzytyczną (rys. 1a) był analizowany w wielu wcześniejszych pracach autorów [4, 5, 6]. W pracach tych zakładano, że niesprężyste właściwości stopu ujawniają się jedynie w podprzestrzeni naprężeń i odkształceń dewiatorowych, oznaczanych odpowiednio przez \mathbf{s} i \mathbf{e} . Nakładając więzy na stan naprężenia, przyjęto klasyczną hipotezę Hubera-Misesa-Hencky'ego [2]. W części kulistej przyjmowano model idealnie sprężysty opisany liniowym prawem zmiany objętości $\mathbf{p} = 3K\mathbf{a}$, gdzie \mathbf{p} i \mathbf{a} oznaczają tensory kuliste naprężeń i odkształceń, natomiast K jest modułem ściśliwości objętościowej [9].

Po przyjęciu powyższych założeń otrzymano następujący zestaw relacji konstytutywnych SMA w podprzestrzeni dewiatorowej [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_o) \\ \dot{\mathbf{e}}_o &= f_{SMA}(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) \end{aligned} \quad (1a)$$

gdzie odwzorowanie f_{SMA} , wyznaczające wartość tensora prędkości odkształceń niesprężystych $\dot{\mathbf{e}}_o$, jest postaci

$$f_{SMA}(\mathbf{e}_o, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{gdy } \|\mathbf{e}_o\| = 0 \text{ i } 2G\|\mathbf{e}\| < \sqrt{2}(k_{pl} + k_{pe}) \\ \mathbf{0} & \text{gdy } \|\mathbf{e}_o\| \neq 0 \text{ i } \|\mathbf{s}_{pl}\| < \sqrt{2}k_{pl} \\ \frac{[\mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{e}}]^+}{\|\mathbf{e}\|^2} \mathbf{e} & \text{gdy } \|\mathbf{e}_o\| = 0 \text{ i } 2G\|\mathbf{e}\| = \sqrt{2}(k_{pl} + k_{pe}) \\ \lambda_{pl} \mathbf{s}_{pl} & \text{gdy } \|\mathbf{e}_o\| \neq 0 \text{ i } \|\mathbf{s}_{pl}\| = \sqrt{2}k_{pl} \end{cases} \quad (1b)$$

jeśli dodatkowo zachodzą związki

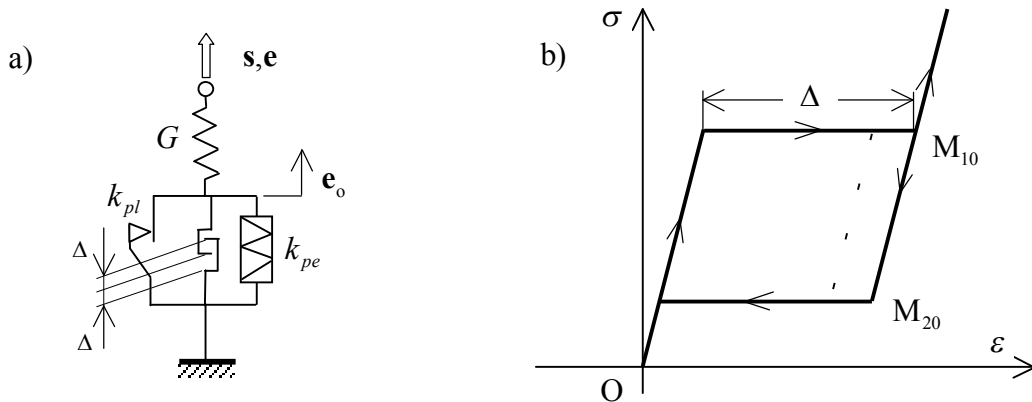
$$\lambda_{pl} = \frac{[\mathbf{s}_{pl} \cdot \dot{\mathbf{e}}]^+}{2k_{pl}^2} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2} k_{pe}}{2G \|\mathbf{e}_o\|} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{s}_{pe} \cdot \mathbf{s}_{pl}}{2k_{pe} k_{pl}} \right)^2 \right] \right\}^{-1}, \quad (1c)$$

$$\mathbf{s}_{pe} = \frac{\sqrt{2} k_{pe}}{\|\mathbf{e}_o\|} \mathbf{e}_o, \quad \mathbf{s}_{pl} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_o) - \frac{\sqrt{2} k_{pe}}{\|\mathbf{e}_o\|} \mathbf{e}_o.$$

W powyższych wzorach zastosowano następujące oznaczenia: G - moduł ścinania, k_{pl} - graniczne naprężenia w części plastycznej, k_{pe} - graniczne naprężenia w części sztywno-idealnie sprężystej (patrz rys. 2a). Tensor \mathbf{e}_o opisuje odkształcenia związane z przemianą martenzytyczną (ang. *transformation strain*).

Dalej przedstawimy metodę formułowania relacji konstytutywnych materiału SMA z pełną przemianą martenzytyczną.

Reologiczny model stopu SMA z lockingem służy do odwzorowania zachowania się materiału, w którym występuje tylko faza martenzytyczna; takie właściwości materiału ilustruje wykres pokazany na rys. 1b. Stąd wynika, że w tym stanie materiału powstają tylko odkształcenia sprężyste, co ilustruje półprosta przechodząca przez punkty M_{20} , M_{10} . Jako model materiału SMA umożliwiający analizowanie tej cechy proponujemy układ reologiczny pokazany na rys. 2a.



Rys. 2. Model materiału SMA z lockingiem

W porównaniu z modelem, który opisują relacje (1), rozważana struktura reologiczna zawiera element ograniczający odkształcenia ciała plastycznego (Saint-Venanta) i sztywno-idealnie sprężystego (Hencky'ego); co ilustruje wykres z rys. 2b. Niegładkie charakterystyki elementów Saint-Venanta i Hencky'ego opisano szczegółowo w pracy [6].

3. MATEMATYCZNY OPIS MODELU SMA Z LOCKINGIEM

Matematyczny opis relacji konstytutywnych struktury z rys. 2a ma następującą formę

$$\mathbf{s}_{pl} + \mathbf{s}_{pe} + \mathbf{s}_{loc} = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_o) \quad (2a)$$

$$\mathbf{e}_o = \lambda_{pe} \mathbf{s}_{pe}; \quad \lambda_{pe} \geq 0; \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{pe}\|^2 \leq k_{pe}^2; \quad \lambda_{pe} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{pe}\|^2 - k_{pe}^2 \right) = 0, \quad (2b)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_o = \lambda_{pl} \mathbf{s}_{pl}, \quad \lambda_{pl} \geq 0, \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{pl}\|^2 \leq k_{pl}^2, \quad \lambda_{pl} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{pl}\|^2 - k_{pl}^2 \right) = 0, \quad (2c)$$

$$\mathbf{s}_{loc} = \lambda_{loc} \mathbf{e}_o, \quad \lambda_{loc} \geq 0, \quad \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_o\|^2 \leq \Delta^2, \quad \lambda_{loc} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{e}_o\|^2 - \Delta^2 \right) = 0, \quad (2d)$$

gdzie: \mathbf{s}_{loc} - tensor naprężeń blokujących odkształcenia ciała plastycznego i sztywno-sprężystego; λ_{loc} - mnożnik określający te naprężenia; Δ - liczba określająca graniczne odkształcenia ciała plastycznego i sztywno sprężystego. Równanie (2a) opisuje równowagę schematu reologicznego, natomiast kolejne związki (2b÷2d) charakteryzują poszczególne elementy modelu. Pomimo pozornego podobieństwa relacji (2b) i (2c) zwracamy uwagę, że w elemencie Hencky'ego (2b) zmiennymi są naprężenia i odkształcenia (akumulowanie energii), podczas gdy związki Saint-Venanta (2c) wiążą naprężenia z prędkościami odkształceń (rozpraszanie energii).

Z relacji zamieszczonych we wzorze (2d) wynika, że

$$\mathbf{s}_{loc} = \mathbf{0} \quad \text{gdy} \quad \|\mathbf{e}_o\| < \sqrt{2}\Delta, \quad (3)$$

w takiej sytuacji wartość tensora prędkości odkształceń $\dot{\mathbf{e}}_o$ obliczamy według funkcji f_{SMA} podanej we wzorze (1b).

Teraz rozważymy graniczne odkształcenia ciała, powstające wtedy, gdy $\|\mathbf{e}_o\| = \sqrt{2}\Delta$. W takim przypadku można wykazać, że zachodzi zależność

$$\mathbf{s}_{pl} + \mathbf{s}_{loc} \equiv \mathbf{s}_w = 2G(\mathbf{e} - \mathbf{e}_o) - \frac{\sqrt{2}}{\|\mathbf{e}_o\|} k_{pe} \mathbf{e}_o. \quad (4)$$

gdzie \mathbf{s}_w reprezentuje naprężenia obciążające ciało plastyczne oraz ciało ograniczające odkształcenia. Ponadto zauważmy, że wielkość

$$\mathbf{r} := \frac{\mathbf{s}_w \cdot \mathbf{e}_o}{\|\mathbf{e}_o\|^2} \mathbf{e}_o, \quad (5)$$

jest równa rzutowi ortogonalnemu tensora naprężeń \mathbf{s}_w na kierunek tensora odkształceń \mathbf{e}_o , natomiast wielkość $\mathbf{s}_w - \mathbf{r}$, reprezentuje składową tensora \mathbf{s}_w ortogonalną do \mathbf{r} , co wynika bezpośrednio z ich iloczynu skalarnego.

W celu ustalenia wartości $\dot{\mathbf{e}}_o$ rozważymy szczegółowo wszystkie przypadki określone wartością tensora \mathbf{s}_w .

- 1) Jeżeli $\|\mathbf{s}_w\| < \sqrt{2}k_{pl}$, wtedy otrzymujemy $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{0}$.
- 2) Jeżeli $\|\mathbf{s}_w\| = \sqrt{2}k_{pl}$, wówczas musimy uwzględnić następujące przypadki:
 - 2a) gdy $\mathbf{s}_w \cdot \mathbf{e}_o > 0$, wtedy $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{0}$, gdyż rzut tensora naprężenia \mathbf{s}_w na kierunek odkształcenia jest zgodny z tensorem \mathbf{e}_o , który osiągnął graniczną wartość;
 - 2b) gdy $\mathbf{s}_w \cdot \mathbf{e}_o \leq 0$, wtedy $\dot{\mathbf{e}}_o = \lambda_{pl} \mathbf{s}_w$; w tym przypadku rzut \mathbf{s}_w jest przeciwny do \mathbf{e}_o , a wartość mnożnika λ_{pl} wyznacza wzór (1c).

3) Jeżeli $\|\mathbf{s}_w\| > \sqrt{2} k_{pl}$, wówczas zachodzą następujące przypadki:

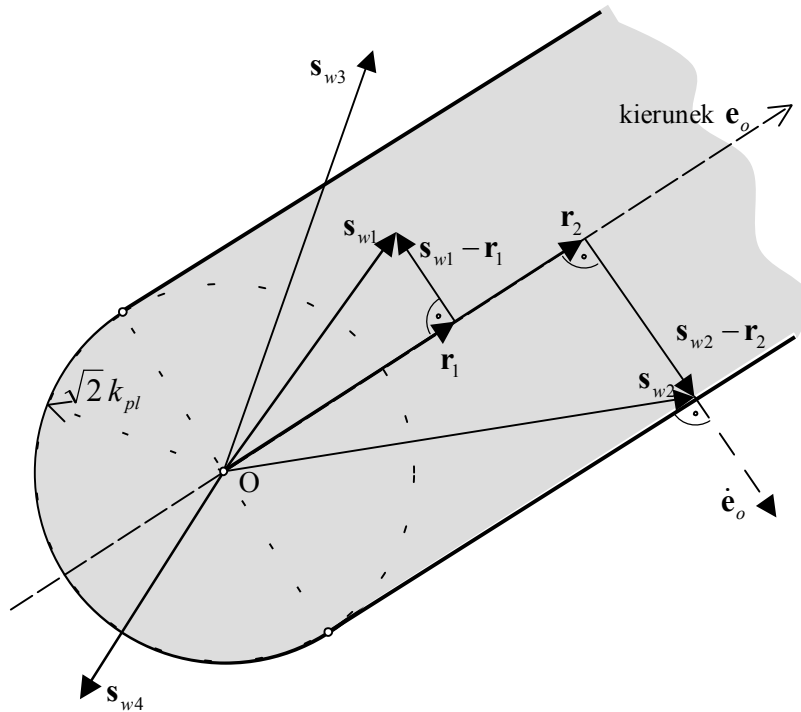
3a₁) gdy $\mathbf{s}_w \cdot \mathbf{e}_o \geq 0$ i $\|\mathbf{s}_w - \mathbf{r}\| < \sqrt{2} k_{pl}$, wtedy $\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{0}$;

3a₂) gdy $\mathbf{s}_w \cdot \mathbf{e}_o \geq 0$ i $\|\mathbf{s}_w - \mathbf{r}\| = \sqrt{2} k_{pl}$, wtedy $\dot{\mathbf{e}}_o = \lambda_{pl}(\mathbf{s}_w - \mathbf{r})$;

3a₃) gdy $\mathbf{s}_w \cdot \mathbf{e}_o \geq 0$ i $\|\mathbf{s}_w - \mathbf{r}\| > \sqrt{2} k_{pl}$, wtedy rozwiązanie nie istnieje;

3b) gdy $\mathbf{s}_w \cdot \mathbf{e}_o < 0$, wtedy rozwiązanie nie istnieje.

Przypominamy, że opisane powyżej przypadki (1)÷(3) służą do wyznaczenia prędkości $\dot{\mathbf{e}}_o$ wtedy, gdy $\|\mathbf{e}_o\| = \sqrt{2}\Delta$. Na rys. 3 przedstawiono dopuszczalny zbiór naprężeń \mathbf{s}_w (szare tło), w chwili, gdy $\|\mathbf{e}_o\| = \sqrt{2}\Delta$. Wtedy składowe tensora naprężenia \mathbf{s}_w , których kierunek pokrywa się z kierunkiem tensora odkształceń \mathbf{e}_o , nie są ograniczane (dowolna wartość reakcji na więzy w części ograniczającej odkształcenia). Z drugiej strony, tensory naprężeń \mathbf{s}_w , których składowe rzutują się przeciwnie do kierunku \mathbf{e}_o , muszą spełniać warunek $\|\mathbf{s}_w\| < \sqrt{2} k_{pl}$. Cztery wektory $\mathbf{s}_{w1} \div \mathbf{s}_{w4}$, pokazane na rys. 3, ilustrują odpowiednio przypadki (3a₁)÷(3b), które zostały opisane powyżej.



Rys. 3. Graficzna interpretacja przypadku (3), opisanego w tekście

4. ZAKOŃCZENIE

Celem pracy było przedstawienie matematycznego opisu charakterystyki konstytutywnej materiału SMA, w którym zachodzi pełna przemiana austenitu w martenzyt. Podstawę do sformułowania tego opisu stanowi struktura reologiczna zawierająca elementy sprężyste, plastyczne, pseudosprężyste oraz element ograniczający odkształcenia (model SMA z

lockingiem). Matematyczny opis materiału sprowadza się do wyprowadzenia odpowiednich równań różniczkowych 1.rzędu względem tensora opisującego niesprężyste odkształcenia.

Otrzymane relacje konstytutywne można wykorzystać do analizy zagadnień początkowo-brzegowych. We wcześniejszych pracach autorów zastosowano system MES ABAQUS/Explicit [1], który umożliwia dołączanie modeli materiałów użytkownika w ramach modułu VUMAT. Przedstawiono wyniki analizy wybranych elementów konstrukcji inżynierskich wykonanych z idealnego stopu SMA (bez lockingu) [4]. Obecnie prace autorów koncentrują się na numerycznej implementacji, przedstawionego w niniejszym artykule, materiału SMA z lockingiem.

LITERATURA

1. ABAQUS Analysis User's Manual, Ver. 6.7, 2007.
2. Bednarski T.: Mechanika plastycznego płynięcia w zarysie. Warszawa : PWN, 1995.
3. Bojarski, Z., Morawiec H.: Metale z pamięcią kształtu. Warszawa :PWN, 1989.
4. Grzesikiewicz W., Zbiciak A.: Implementation of SMA material model for ABAQUS/Explicit software. "Theoretical Foundations of Civil Engineering" 2005, Vol. 13, p. 357-362.
5. Grzesikiewicz W., Zbiciak A.: A proposal of constitutive relations of SMA material subjected to dynamic loads. Proceedings of COMPLAS IX. Computational Plasticity. Fundamentals and Applications, Barcelona 2007, p. 596-598.
6. Grzesikiewicz W., Wakulicz A., Zbiciak A.: Modelowanie matematyczne materiałów z pamięcią kształtu. W: I Kongres Mechaniki Polskiej. Warszawa 2007r. Streszczenia referatów s. 83. (pełny tekst 8 str. na płycie CD)
7. Lammering, R., Schmidt, I.: Experimental investigations on the damping capacity of NiTi components. "Smart Mater. Struct" 2001, 10, p. 853-859.
8. Mc Naney, J.M., Imbeni, Jung, V.Y., Papadopoulos, P., Ritchie, R.O.: An experimental study of the superelastic effect in a shape-memory Nitinol alloy under biaxial loading. "Mechanics of Materials" 2003, 35 p. 969-986.
9. Ostrowska-Maciejewska J.: Mechanika ciał odkształcalnych. Warszawa :PWN, 1994.
10. Otsuka K., Ren X.: Physical metallurgy of Ti-Ni based shape memory alloys. "Progress in Materials Sciences" 2005, 50 , p. 511-678.
11. Pieczyńska E.: Analiza doświadczalna właściwości termomechanicznych stopów TiNi oraz poliuretanu z pamięcią kształtu. Prace IPPT 2008 nr 3.
12. Ziółkowski A.: Pseudosprężystość stopów z pamięcią kształtu - badania doświadczalne i opis teoretyczny. Rozprawa habilitacyjna. Prace IPPT 2006 nr 6.

CONSTITUTIVE MODEL OF SMA MATERIAL WITH LOCKING

Summary. The objective of the paper was to present the mathematical description of constitutive properties of the SMA material with complete martensitic transformation. The rheological model possessing elastic, plastic, pseudoelastic and locking elements was proposed. The key problem being discussed herein was to evaluate the rate of non-elastic strain. The constitutive relationships being obtained in the paper may be used for initial-boundary value problems analysis using FEM software.