

## PROJEKTOWANIE SYSTEMU REGULACJI ZE WZGLĘDU NA ŻĄDANE WIDMO CZĘSTOŚCI

ANDRZEJ DYMAREK , TOMASZ DZITKOWSKI

*Inst. Automatykacji Proces. Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska  
e-mail: andrzej.dymarek@polsl.p.l tomasz.dzitkowski@polsl.pl*

Streszczenie. W niniejszej pracy przedstawiono metodę projektowania systemów regulowanych ze względu na żądane własności dynamiczne. W pracy sformułowano metodę doboru modelu oraz siły sterującej ze względu na żądane widmo częstości. Dokonano syntezy systemu regulacji proporcjonalnej zgodnie z zaproponowaną metodą oraz sprawdzono poprawność otrzymanych wyników.

### 1. WSTĘP

Wartości własne układu drgającego w jednoznaczny sposób określają jego ruch. W przypadku układów sterowanych czy regulowanych model musi zostać rozszerzony o system regulacji. Prawidłowy model maszyny pozwala na właściwą optymalizację jej sterowania, dzięki czemu możliwe jest zastosowanie odpowiedniego, w świetle przyjętych kryteriów, sterowania. Przyjęcie właściwego modelu maszyny poddanej optymalnemu sterowaniu zależy od doświadczenia i intuicji projektanta. Przyjęty model może okazać się jednak niepoprawny ze względu na częstości rezonansowe, które mają istotny wpływ na sterowany obiekt. Konieczne jest sprecyzowanie kryterium identyfikacji struktury i parametrów modelu oraz sterowania tym modelem, które będzie spełniało własności dynamiczne maszyny poddanej optymalnemu sterowaniu. Jednym z warunków przyjęcia takiego modelu maszyny jest synteza układów mechanicznych o żądanych własnościach dynamicznych. Problem poszukiwania modelu oraz wartości siły sterującej takiej, aby ruch układu odbywał się zgodnie z przyjętą charakterystyką dynamiczną, jest typowym zadaniem syntezy czynnej. Wiele metod projektowania systemów regulacji wymaga skomplikowanego aparatu matematycznego. Dlatego w pracy przedstawiona zostanie metoda doboru modelu oraz siły sterującej ze względu na żądane własności dynamiczne niewymagająca użycia tak skomplikowanych pojęć.

### 2. PROJEKTOWANIE UKŁADÓW ZE STEROWANIEM ZE WZGLĘDU NA ŻĄDANE WIDMO CZĘSTOŚCI

Niech dane będą własności dynamiczne poszukiwanego układu w postaci ciągu częstości rezonansowych, antyrezonansowych oraz wartości spadku częstości rezonansowych:

$$\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1} \text{ - częstości rezonansowe,}$$

$\omega_0, \omega_2, \dots, \omega_{2n}$  - częstości antyrezonansowe,  
 $h_1, h_3, \dots, h_{2n-1}$  - spadek częstości drgań własnych.

W przypadku tak przyjętych własności należy wyznaczyć charakterystykę dynamiczną w formie:

$$U(s) = H \frac{L(s)}{M(s)} = H \frac{\prod_{i=1}^n (s^2 + 2h_{2i-1}s + s_{2i-1}^2)}{\prod_{j=0}^n (s^2 + s_{2j}^2)} = \quad (1)$$

$$= H \frac{d_l s^l + d_{l-1} s^{l-1} + \dots + d_0}{c_{l-1} s^{l-1} + c_{l-2} s^{l-2} + \dots + c_1 s} = U_U(s) + U_F(s),$$

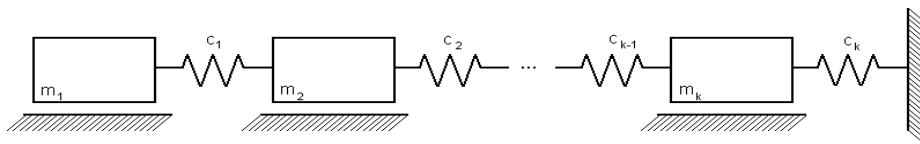
gdzie:  $H$  - stała proporcjonalności,  $s$  - operator Laplace'a,  $s_{2i-1}, s_{2j}$  - wartości liczbowe żądanych częstości rezonansowych i antyrezonansowych,  $U_U(s)$  - charakterystyka dynamiczna poszukiwanego układu,  $U_F(s)$  - charakterystyka dynamiczna poszukiwanej siły sterującej.

Następnie dokonuje się rozkładu charakterystyki dynamicznej  $U_U(s)$  znanymi metodami syntezy dyskretnych układów drgających [1-6,9], na przykład na ułamek łańcuchowy (2):

$$U_U(s) = U_s^{(1)}(s) + \frac{1}{V_s^{(1)}(s) + \frac{1}{U_s^{(2)}(s) + \frac{1}{V_s^{(2)} + \frac{\vdots}{1}{U_s^{(k-1)}(s) + \frac{1}{V_s^{(k)}(s)}}}}, \quad (2)$$

gdzie:  $U^{(1)}(s) = m_U^{(1)} s$ ,  $V^{(1)}(s) = \frac{s}{c_V^{(1)}}$ , ...,  $V^{(k-1)}(s) = \frac{s}{c_V^{(k-1)}}$ ,  $U^{(k)}(s) = m_U^{(k)} s$ .

W wyniku rozkładu funkcji charakterystycznej na ułamek łańcuchowy (2) otrzymuje się strukturę układu dyskretnego wraz z wartościami jego parametrów przedstawioną na rys. 1.



Rys. 1. Model dyskretny układu otrzymany w wyniku syntezy metodą rozkładu charakterystyki dynamicznej  $U_U(s)$  na ułamek łańcuchowy

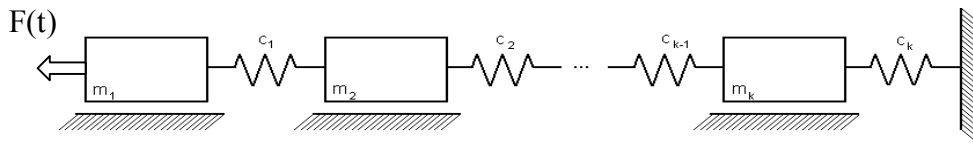
Na podstawie układu z rys. 1 wyznacza się funkcje sztywności wówczas gdy siła przyłożona jest w dowolnym punkcie materialnym, wybranym przez projektanta. Siła wymuszająca jest poszukiwaną siłą sterującą, której wartość zostanie wyznaczona w kolejnym kroku.

$$\frac{F(s)}{X_1(s)} = \frac{L(s)}{M_1(s)}, \frac{F(s)}{X_2(s)} = \frac{L(s)}{M_2(s)}, \dots, \frac{F(s)}{X_k(s)} = \frac{L(s)}{M_k(s)}. \quad (3)$$

Wartości wielomianów  $M_1(s), M_2(s), \dots, M_k(s)$  z równania 3 posłużą do wyznaczenia wartości siły w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
 U_F(s) &= \frac{L_1(s)}{M(s)} \\
 \frac{L_1(s)}{M_1(s)} &= a_1s + b_1 + \frac{L_2(s)}{M_1(s)}, \\
 \frac{m_2L_2(s)}{M_2(s)} &= a_2s + b_2 + \frac{L_3(s)}{M_2(s)}, \\
 &\vdots \\
 \frac{m_{k-1}L_{k-1}(s)}{M_{k-1}(s)} &= a_{k-1}s + b_{k-1} + \frac{m_kL_k(s)}{M_{k-1}(s)}, \\
 \frac{m_kL_k(s)}{M_k(s)} &= a_k s + b_k, \\
 F(s) &= a_1s + b_1 + a_2s + b_2 + \dots + a_k s + b_k, \\
 F(t) &= a_1\dot{x}_1 + b_1x_1 + a_2\dot{x}_2 + b_2x_2 + \dots + a_k\dot{x}_k + b_kx_k.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Ostatecznie w wyniku przeprowadzonej syntezy otrzymuje się układ przedstawiony na rys.2.



Rys.2. Układ otrzymany wyniku syntezy

Przedstawioną metodę można zaliczyć do metod projektowania układów regulacji proporcjonalnej ze sprzężeniem zwrotnym od stanu.

### 3. PRZYKŁAD LICZBOWY

Przyjmuje się, że poszukiwany układ ma spełniać następujące wymagania:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 1.814 \frac{rad}{s}, \omega_3 = 5.85 \frac{rad}{s} - \text{częstości rezonansowe,} \\
 \omega_0 &= 0 \frac{rad}{s}, \omega_2 = 5.48 \frac{rad}{s} - \text{częstości antyrezonansowe,} \\
 h_1 &= 1 \frac{rad}{s} - \text{spadek częstości drgań własnych.}
 \end{aligned}$$

Na podstawie przyjętych wymagań funkcja charakterystyczna poddana syntezie przyjmuje postać:

$$V(s) = \frac{1}{H} \frac{s(s^2 + \omega_2^2)}{(s^2 + 2h_1s + h_1^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)} = \frac{1}{4} \frac{s^3 + 30s}{1s^4 + 2s^3 + 38.5s^2 + 68.5s + 147},$$

$$U(s) = \frac{4s^4 + 8s^3 + 154s^2 + 274s + 588}{s^3 + 30s} = \frac{4s^4 + 150s^2 + 450}{s^3 + 30s} + \frac{8s^3 + 4s^2 + 274s + 138}{s^3 + 30s}$$

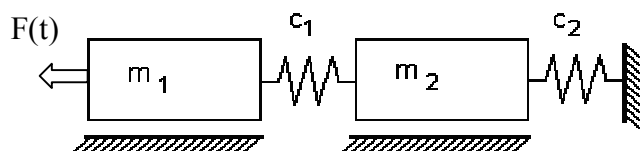
$$= U_U(s) + U_F(s).$$

Stosując syntezę metodą rozkładu funkcji charakterystycznej  $U_U(s)$  na ułamek łańcuchowy [2-5], otrzymuje się:

$$U_U(s) = \frac{4s^4 + 150s^2 + 450}{s^3 + 30s} = m_1s + \frac{1}{\frac{c_1}{s} + \frac{1}{m_2s + \frac{c_2}{s}}},$$

gdzie:  $m_1 = 4.00$  kg,  $m_2 = 2.00$  kg,  $c_1 = 30 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $c_2 = 30 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .

Na podstawie zastosowanej metody syntezy buduje się dyskretny układ mechaniczny przedstawiony na rys. 3.



Rys.3. Model układu otrzymany w wyniku syntezy powolności  $U_U(s)$

Wyznaczone funkcje charakterystyczne na podstawie układu rys.3, w postaci sztywności w przypadku, gdy siła zaczepiona jest do masy  $m_1$ , przyjmują postać:

$$\frac{F(s)}{X_1(s)} = \frac{L(s)}{M_1(s)} = \frac{4s^4 + 150s^2 + 450}{s^2 + 30} \Rightarrow M_1(s) = s^2 + 30,$$

$$\frac{F(s)}{X_2(s)} = \frac{L(s)}{M_2(s)} = \frac{4s^4 + 150s^2 + 450}{30} \Rightarrow M_2(s) = 30.$$

Wartość sprzężenia zwrotnego od stanu [7,8] w postaci siły  $F(t)$  oblicza się na podstawie (4).

$$U_F(s) = \frac{L_1(s)}{M(s)} = \frac{8s^3 + 4s^2 + 274s + 138}{s^3 + 30s},$$

skąd otrzymuje się:

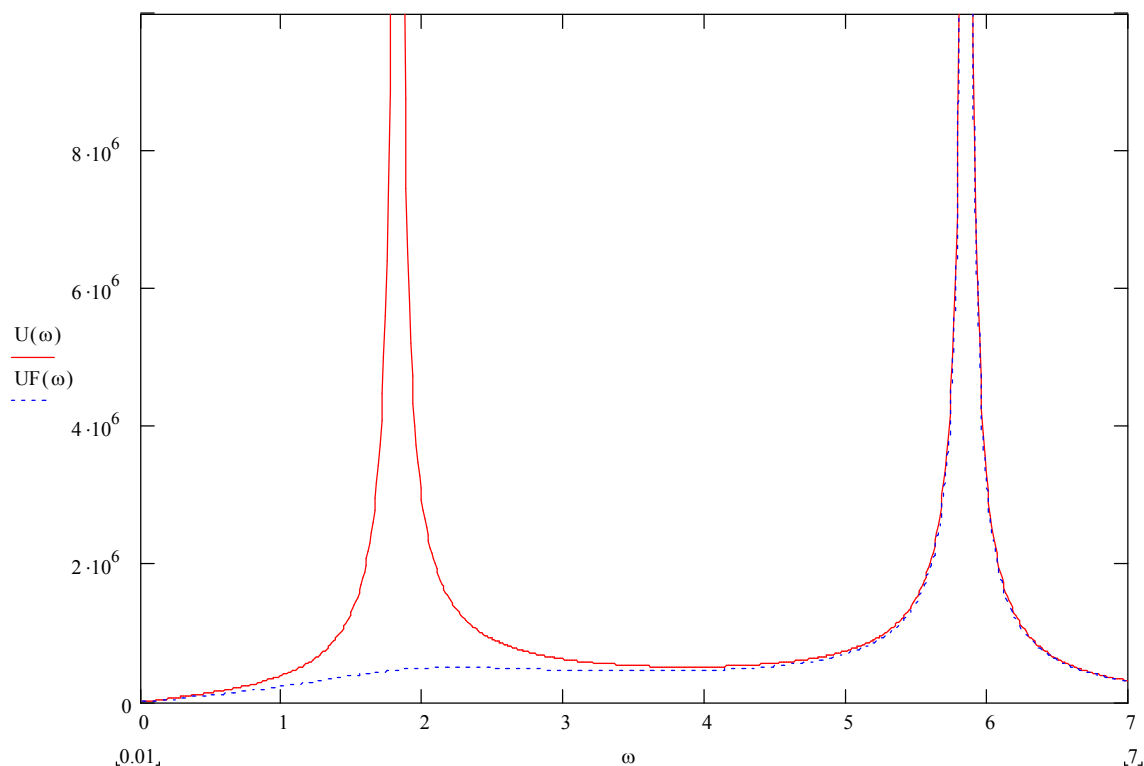
$$\frac{L_1(s)}{M_1(s)} = \frac{8s^3 + 4s^2 + 274s + 138}{s^2 + 30} = 8s + 4 + \frac{34s + 18}{s^2 + 30},$$

oraz

$$\frac{m_2 L_2(s)}{M_2(s)} = \frac{2 \cdot (34s + 18)}{30} = 2.26s + 1.2. \quad (10)$$

Ostatecznie wartość siły sterującej przyjmuje postać:

$$F(t) = -8\dot{x}_1 - 4x_1 - 2.26\dot{x}_2 - 1.2x_2. \quad (11)$$



Rys.4. Wykres funkcji charakterystycznej układu nieregulowanego  $U(\omega)$  i regulowanego  $U_F(\omega)$

Sprawdzenia poprawności przeprowadzonych rozważań dokonano, generując wykres podatności w przypadku układu otrzymanego w wyniku syntezy (rys.3) [1,2,3,9]. Wykres funkcji charakterystycznej wyznaczonej na podstawie zsyntezowanego układu przedstawiono na rys. 4.

#### 4. WNIOSKI

Przedstawiona praca dotyczy sformułowania i rozwiązania zadania syntezy czynnej układów drgających. Jest propozycją doboru siły sterującej oraz układu drgającego spełniającego żądane własności dynamiczne w postaci ciągu częstości rezonansowych. Zaletą proponowanej metody wyznaczenia siły sterującej w układzie jest jej prostota. Zaproponowaną metodę można zaliczyć do metody regulacji proporcjonalnej, a w szczególności regulacji proporcjonalnej ze sprzężeniem zwrotnym od stanu [7]. Praca jest również próbą wskazania nowych możliwości oraz kierunku badań w projektowaniu podzespołów maszyn o żądanym widmie częstości.

## LITERATURA

1. Bellert S., Woźniacki H: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. Warszawa : WNT, 1968.
2. Buchacz A., Dymarek A.: Synteza podzespołów maszyn ze względu na wymagane widmo częstości jako problem projektowania suwnicy pomostowej. W: XII konferencja naukowa „Problemy rozwoju maszyn roboczych” . Zakopane 2000, s. 75-81.
3. Dymarek A.: Odwrotne zadanie dynamiki tłumionych mechanicznych układów drgających w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Pol. Śląska , Gliwice, 2001.
4. Dymarek A., Dzitkowski T., Gwóźdź A.: Synteza układów belkowych ze względu na żądane widmo częstości. „Modelowanie Inżynierskie” 2008, nr 36, s. 55-62. .
5. Dymarek A.: The sensitivity as a criterion of synthesis of discrete vibrating fixed mechanical system. “Journal of Materials Processing Technology” 2004, Vol. 157-158, Complete 2004, p.138-143.
6. Dymarek A., Dzitkowski T.: Modelling and synthesis of discrete – continuous subsystems of machines with damping. “Journal of Materials Processing Technology” Vol. 164-165, Complete 2005, p.1317-1326.
7. Heimann B., Gerth W., Popp K.: Mechatronika : komponenty, metody przykłady. Warszawa : Wyd. Nauk. PWN, 2001.
8. Węgrzyn S.: Podstawy automatyki. Warszawa : Wyd. Nauk. PWN, 1972.
9. Świder J.[red], Kaźmierczak J.[red] i in. Wspomaganie komputerowe CAD CAM : Wspomaganie konstruowania układów redukcji drgań i hałasu maszyn. Warszawa : WNT, 2001. .

**THE SYNTHESIS OF REGULATION SYSTEMS WITH RESPECT TO REQUIRED DYNAMIC PROPERTIES**

Summary. This paper concerns formulating and solving the problem of synthesis of vibrating discrete mechanical systems with controlling force. In this paper a method of synthesis to determination of structure and inertial, elastical, force parameters has been presented. Such task may be classified as the method of reverse task of active mechanical systems