

DOBÓR CZĘSTOŚCI ANTYREZONANSOWYCH W SYNTEZIE UKŁADÓW BELKOWYCH

ANDRZEJ DYMAREK

*Inst. Automatykacji Proces. Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska
e-mail: andrzej.dymarek@polsl.p.l tomasz.dzitkowski@polsl.pl*

Streszczenie. W pracy przedstawiono rozwiązanie zadania odwrotnego dynamiki układów belkowych o żądanych własnościach dynamicznych. Problem projektowania układów belkowych dotyczy sformułowania warunków syntezy układów ciągłych, w szczególności układów belkowych. W niniejszej pracy szczególną uwagę zwrócono na wpływ doboru charakterystyki dynamicznej na wyniki syntezy poszukiwanych układów. Poprawność otrzymanych wyników sprawdzono przy wykorzystaniu programu ABC Rama.

1. WSTĘP

Ze względu na trudności z rozwiązaniem zagadnień dynamicznych dotyczących układów ciągłych przyjmuje się często uproszczenia polegające na zastąpieniu takiego układu modelem dyskretnym. Jakość modelu, którym posługuje się projektant, rozumiana jako wierność odwzorowania istotnych zjawisk występujących w rzeczywistym układzie, ma zasadniczy wpływ na trafność podejmowanych decyzji. Stwarza to konieczność poszukiwania nowych metod wyznaczania struktury i parametrów układu mechanicznego na podstawie żądanych wymagań. Wymagania te dotyczą własności dynamicznych układu, a w szczególności ich widma częstości [2-7].

Pierwszym etapem syntezy układów mechanicznych jest więc poszukiwanie funkcji matematycznych, które z jednej strony spełniają warunki stawiane układom, a z drugiej mogą być zrealizowane w układzie rzeczywistym. Problem sprowadza się więc do poszukiwania funkcji wymiernych spełniających zarówno warunki fizycznej realizowalności, jak i żądane wymagania dynamiczne [2-7]. Przedstawiona w pracy synteza układów belkowych polega na zastosowaniu metod syntezy układów dyskretnych oraz wykorzystaniu znanych metod dyskretyzacji układów ciągłych [3,5]. Stosując znane metody syntezy układów mechanicznych [1-7] w połączeniu z odwróconą metodą sił i przemieszczeń, trudno jest otrzymać układy belkowe bez dokonania porównania układu otrzymanego w wyniku syntezy z modelem dyskretnym poszukiwanego układu belkowego. Podejście takie spowodowane jest brakiem ścisłego opisu doboru częstości antyrezonansowych charakterystyki dynamicznej poddanej syntezie. Dlatego problem projektowania układów belkowych przedstawiony w pracy dotyczy prawidłowego sformułowania warunków syntezy układów ciągłych w szczególności układów belkowych.

2. WŁASNOŚCI FUNKCJI CHARAKTERYSTYCZNYCH PODDANYCH SYNTEZIE [3]

Wymagania dotyczące funkcji charakterystycznych poszukiwanego układu mogą być podane w postaci :

- graficznej (wykres),
- ciągu liczb: zer i biegunów,
- analitycznej.

Ze względu na zastosowania funkcji wymiernych rzeczywistych dodatnich do syntezy, głównie dyskretnych układów drgających jako modeli układów belkowych, celowe będzie podanie tych ich cech, które są wykorzystywane w pracy, a więc:

- suma skończonej liczby funkcji wymiernych rzeczywistych dodatnich jest funkcją wymierną rzeczywistą dodatnią; własność tę wykorzystano przy rozkładzie charakterystyki dynamicznej na ułamki proste i w syntezie metodą mieszaną.
- iloczyn funkcji wymiernej rzeczywistej dodatniej przez stałą dodatnią jest funkcją wymierną rzeczywistą dodatnią; tę własność wykorzystuje się do przedstawienia charakterystyki dynamicznej w postaci normalnej oraz do jej skalowania .
- odwrotność funkcji wymiernej rzeczywistej dodatniej jest funkcją wymierną rzeczywistą dodatnią; czyli

$$V(s) = \frac{1}{U(s)}. \quad (1)$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, żeby funkcja wymierna była funkcją rzeczywistą, jest warunek, aby jej współczynniki były rzeczywiste.

Warunkami wystarczającymi do tego, aby funkcja wymierna rzeczywista była dodatnia, są:

- funkcja wymierna rzeczywista dodatnia w postaci (1) ma wszystkie współczynniki tego samego znaku; jest to jednocześnie warunek konieczny przedstawiania charakterystyk dynamicznych w postaci funkcji zespolonej argumentu,
- różnica stopni licznika i mianownika, funkcji wymiernej rzeczywistej dodatniej może przyjmować tylko wartości 0, ± 1 ,
- funkcja wymierna rzeczywista dodatnia nie ma zer ani biegunów w prawej półpłaszczyźnie, czyli $\text{Re } s > 0$,
- zera i bieguny funkcji wymiernej rzeczywistej leżące w lewej półpłaszczyźnie liczb zespolonych muszą być pojedyncze; pochodne w zerach i residua w biegunach muszą być dodatnie.

Projektując układy belkowe swobodnie podparte ze względu na żądane widmo częstości należy określić warunki realizowalności takich układów. Warunki takie, oprócz własności przedstawionych powyżej, dotyczą przede wszystkim doboru zer charakterystyki dynamicznej poddanej syntezie. Problem dobór zer charakterystyki dynamicznej przedstawiono w następnym rozdziale pracy.

3. PRZYKŁAD LICZBOWY

W poniższym rozdziale przedstawione zostaną przykłady liczbowe ukazujące konsekwencje złego doboru zer charakterystyki dynamicznej.

Przykłady liczbowe dotyczą syntezy belek swobodnie podpartych otrzymanych w wyniku syntezy wyniku syntezy metodą algorytmu wyznaczania elementu typu sprężystego.

Przyjmuje się, że poszukiwany układ spełnia wymagania określone w postaci ciągu częstości rezonansowych:

$$\omega_2 = 26 \frac{rad}{s}, \quad \omega_4 = 106 \frac{rad}{s} \quad (2)$$

oraz zer (częstości antyrezonansowych):

- gdy zero dobrane jest na podstawie zależności:

$$\omega_1 = \left(\frac{\omega_2^2 + \omega_4^2}{2} \right) = 77.1 \frac{rad}{s}, \quad (3)$$

- gdy zero dobrane jest dowolnie, bliżej pierwszej częstości rezonansowej - $\omega_1 = 40 \frac{rad}{s}$,

- gdy zero dobrane jest dowolnie, bliżej drugiej częstości rezonansowej - $\omega_1 = 90 \frac{rad}{s}$.

Funkcję charakterystyczną (1) można przedstawić w postaci następującej funkcji wymiernej:

$$U(s) = \frac{(s^2 + \omega_2^2)(s^2 + \omega_4^2)}{s(s^2 + \omega_1^2)}, \quad (4)$$

gdzie: s - zmienna Laplace'a.

Synteza charakterystyki dynamicznej (4) zostanie przeprowadzona metodą algorytmu wyznaczania dwójników typu sprężystego. W wyniku rozkładu funkcji charakterystycznej (2) otrzymuje się wartości parametrów inercyjnych i sprężystych dyskretnego układu drgającego w postaci ułamka łańcuchowego:

$$U(s) = \frac{c_1}{s} + m_1 s + \frac{1}{\frac{s}{c_2} + \frac{1}{m_2 s + \frac{c_3}{s}}}, \quad (5)$$

Rezultatem przeprowadzonej syntezy jest dyskretny układ drgający o strukturze kaskadowej. Otrzymany układ jest modelem poszukiwanego układu belkowego. Na podstawie otrzymanych wartości sztywności i elementów inercyjnych wyznacza się momenty bezwładności przekroju poszukiwanej belki.

Przypadek I $\left(\omega_1 = 77.1 \frac{rad}{s} \right)$

Dokonując syntezy przypadku 1, otrzymuje się następujące wartości elementów inercyjnych i sprężystych:

$$m_1 = 1.00 \cdot H \text{ kg}, \quad m_2 = 1.01 \cdot H \text{ kg}$$

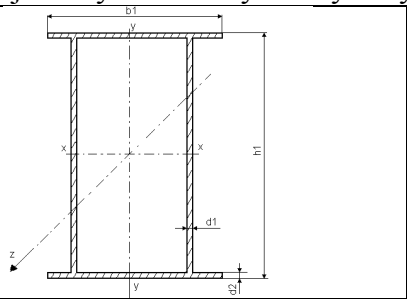
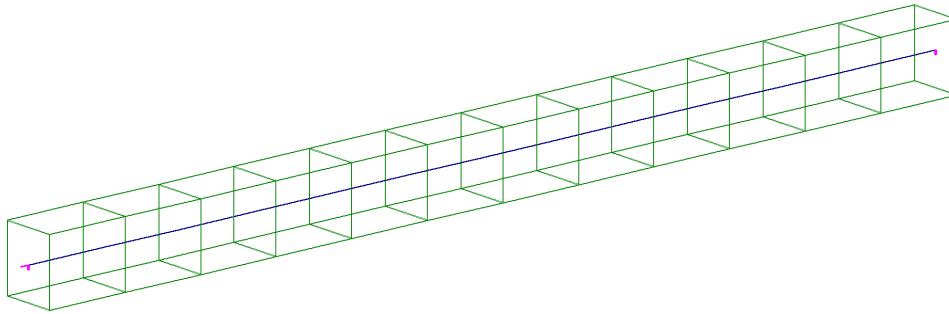
$$c_1 = 650.00 \cdot H \frac{N}{m}, \quad c_2 = 5307.42 \cdot H \frac{N}{m}, \quad c_3 = 650.00 \cdot H \frac{N}{m},$$

gdzie: H -stała proporcjonalności.

Na podstawie otrzymanych wartości wyznacza się momenty bezwładności przekroju poszukiwanej belki. Rezultaty syntezy przedstawiono w tabeli 1 oraz na rys. 2.

Tabela 1. Dane wymiarowe przekroju otrzymane w wyniku syntezy

Przekrój I	
$I_1 = 8 \cdot 10^{-3} [m^4]$	
$h_1 [mm]$	1399
$d_2 [mm]$	10
$b_1 [mm]$	599
$d_1 [mm]$	6

Rys. 2. Przekrój otrzymany w wyniku syntezy przypadku 1

Poprawność otrzymanych rezultatów obliczeń została sprawdzona przy wykorzystaniu programu ABC. Wyniki zilustrowane zostały na rys.3.

Częstości drgań własnych				
Nr	$w[1/s]$	$f[Hz]$	$T[sek]$	Błąd[%]
1	26,79	4,264	0,2345	0,0
2	107,2	17,06	0,05861	0,0
3	241,1	38,37	0,02606	0,0
4	251,4	40,01	0,02499	0,0

Rys. 3. Sprawdzenie poprawności otrzymanych wyników z wykorzystaniem programu ABC

Przypadek II $\left(\omega_1 = 40 \frac{rad}{s} \right)$

Dokonując syntezy przypadku 2, gdy zero charakterystyki dobrane jest bliżej pierwszej częstości rezonansowej, otrzymuje się następujące wartości elementów inercyjnych i sprężystych:

$$m_1 = 1.00 \cdot H \text{ kg}, m_2 = 6.31 \cdot H \text{ kg}$$

$$c_1 = 2650.00 \cdot H \frac{N}{m}, c_2 = 7504.41 \cdot H \frac{N}{m}, c_3 = 2650.00 \cdot H \frac{N}{m},$$

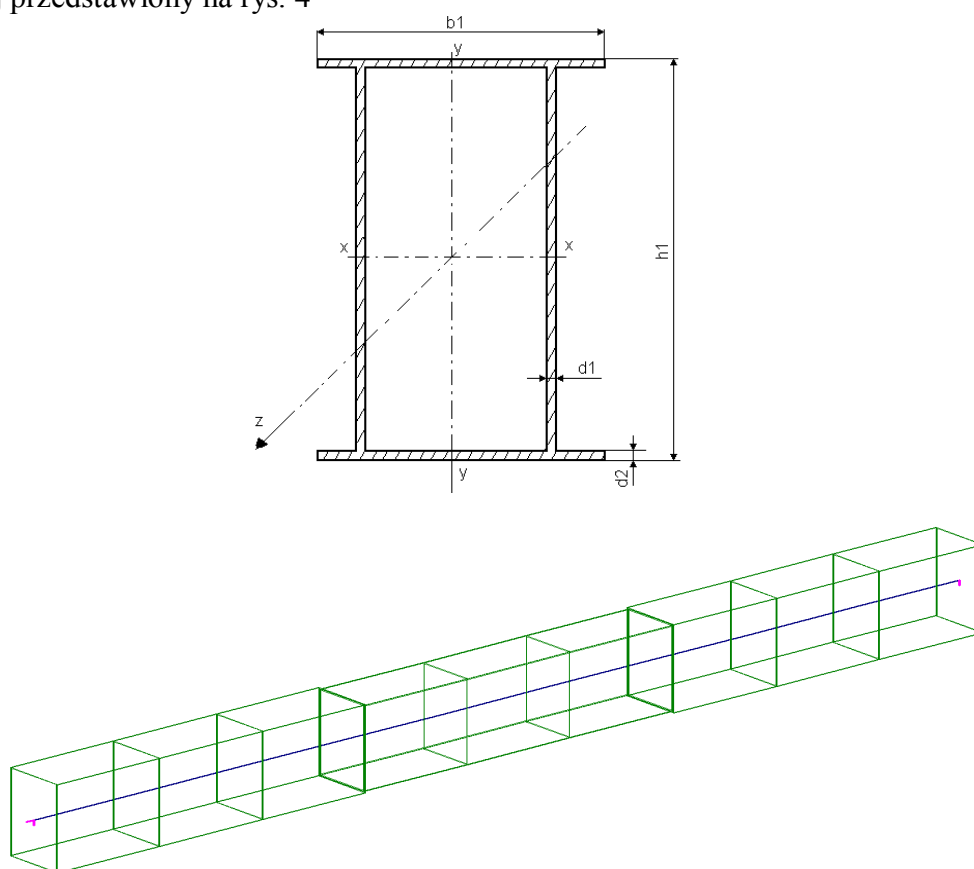
gdzie: H -stała proporcjonalności.

Momenty bezwładności przekroju poszukiwanej belki przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Dane wymiarowe przekroju otrzymane w wyniku syntezy metodą algorytmu wyznaczania elementu typu sprężystego

Przekrój 1		Przekrój 2		Przekrój 3	
$I_1 = 9,627 \cdot 10^{-3} [m^4]$		$I_2 = 8,765 \cdot 10^{-3} [m^4]$		$I_3 = 9,627 \cdot 10^{-3} [m^4]$	
$h_1 [mm]$	1463	$h_1 [mm]$	1418	$h_1 [mm]$	1463
$d_2 [mm]$	10	$d_2 [mm]$	10	$d_2 [mm]$	10
$b_1 [mm]$	627	$b_1 [mm]$	608	$b_1 [mm]$	627
$d_1 [mm]$	6	$d_1 [mm]$	6	$d_1 [mm]$	6

W wyniku przeprowadzonej syntezy ostatecznie otrzymuje się układ belkowy oraz jego przekrój przedstawiony na rys. 4



Rys. 4. Przekrój otrzymany w wyniku syntezy przypadku 2

Poprawność otrzymanych rezultatów obliczeń została sprawdzona przy wykorzystaniu programu ABC. Wyniki zilustrowane zostały na rys.5.

Częstości drgań własnych					
Nr	$w[1/s]$	$f[Hz]$	$T[sek]$	Błąd[%]	
1	27,66	4,402	0,2272	0,0	
2	113	17,98	0,0556	0,0	
3	251,3	40	0,025	0,0	
4	252,8	40,23	0,02485	0,0	

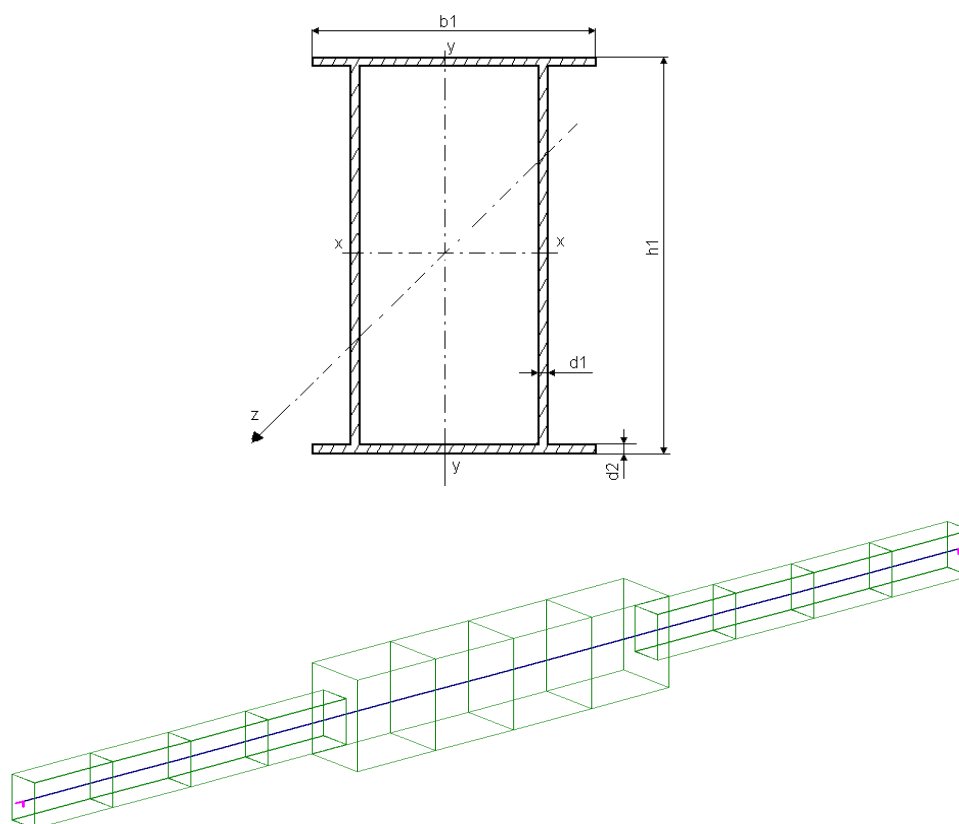
Rys. 5. Sprawdzenie poprawności otrzymanych wyników z wykorzystaniem programu ABC

Przypadek III $\left(\omega_1 = 90 \frac{rad}{s} \right)$

Rezultaty badań otrzymane w wyniku zastosowania syntezy metodą algorytmu wyznaczania dwójników typu sprężystego zamieszczono w tabeli 3.

Tabela 3. Dane wymiarowe przekroju otrzymane w wyniku syntezy metodą algorytmu wyznaczania dwójników typu sprężystego

Przekrój 1		Przekrój 2		Przekrój 3	
$I_1 = 7.659 \cdot 10^{-3} [m^4]$		$I_2 = 0.025 [m^4]$		$I_3 = 0.034 [m^4]$	
$h_1 [mm]$	1357	$h_1 [mm]$	2007	$h_1 [mm]$	2223
$d_2 [mm]$	10	$d_2 [mm]$	10	$d_2 [mm]$	10
$b_1 [mm]$	581	$b_1 [mm]$	860	$b_1 [mm]$	953
$d_1 [mm]$	6	$d_1 [mm]$	6	$d_1 [mm]$	6



Rys.6. Przekrój otrzymany w wyniku syntezy (przypadek 3)

Poprawność otrzymanych rezultatów obliczeń została sprawdzona przy wykorzystaniu programu ABC. Wyniki zilustrowane zostały na rys.7.

Częstości drgań własnych				
Nr	w[1/s]	f[Hz]	T[sek]	Błąd[%]
1	48,72	7,754	0,129	0,0
2	168,4	26,8	0,03731	0,0
3	235,4	37,47	0,02669	0,0
4	508,8	80,98	0,01235	0,0028

Rys.7. Sprawdzenie poprawności wyników syntezy otrzymanych z wykorzystaniem programu ABC

Otrzymane w wyniku syntezy belki swobodnie podparte poddano analizie w programie ABC. W przypadku I wartości częstości rezonansowych nieznacznie odbiegają od przyjętych częstości rezonansowych (2), natomiast w przypadku II i III błędy są znaczące. Na podstawie wyników analizy można stwierdzić, że znaczący wpływ na syntezę ma dobór zer charakterystyki dynamicznej.

4. WNIOSKI

Praca dotyczy sformułowania i rozwiązania zadania syntezy układów belkowych. W pracy przedstawiono wpływ doboru obszarów antyrezonansowych na wartości parametrów poszukiwanego układu. Z przeprowadzonych w pracy badań nasunęły się następujące wnioski:

- dokładność syntezy układów belkowych zależy od doboru częstości antyrezonansowych,
- w przypadku syntezy belek swobodnie podpartych częstości antyrezonansowe (zera) powinno dobierać się na podstawie równania:

$$U(s) = \frac{1}{V(s)} = \frac{\prod_{i=1}^n (s^2 + s_{2i}^2)}{s \left(\prod_{j=1}^n (s^2 + s_{2j-1}^2) \right)} = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{L(s)}{s \left(\prod_{i=1}^n \left(s^2 + \left(\frac{s_{2i}^2 + s_{2i+2}^2}{2} \right) \right) \right)},$$

gdzie: s_{2i} - bieguny, s_{2j} - zera (odpowiednio częstości antyrezonansowe (zera) i rezonansowe (bieguny) poszukiwanego układu).

LITERATURA

1. Bellert S., Woźniacki H: Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. Warszawa : WNT, 1968.
2. Buchacz A.: Synteza drgających układów prętowych w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. ZN Pol. Śląskiej, z. 104, MECHANIKA, Gliwice 1991.
3. Buchacz A., Dymarek A.: Synteza podzespołów maszyn ze względu na wymagane widmo częstości jako problem projektowania suwnicy pomostowej. W : XII konferencja naukowa „Problemy rozwoju maszyn roboczych”. Zakopane 2000, s. 75-81.
4. Dymarek A.: Odwrotne zadanie dynamiki tłumionych mechanicznych układów drgających w ujęciu grafów i liczb strukturalnych. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice, 2001.
5. Dymarek A., Dzitkowski T., Gwóźdź A.: Synteza układów belkowych ze względu na żądane widmo częstości. „Modelowanie Inżynierskie” 2008, nr 36, s. 55-62.

6. Dymarek A.: The sensitivity as a criterion of synthesis of discrete vibrating fixed mechanical system. "Journal of Materials Processing Technology" Vol. 157-158, Complete 2004, p.138-143.
7. Dymarek A., Dzitkowski T.: Modelling and synthesis of discrete – continuous subsystems of machines with damping. "Journal of Materials Processing Technology" Vol. 164-165, Complete 2005, p.1317-1326.

ANTIRESONANCE FREQUENCY SELECTION IN THE CASE OF BEAM SYSTEM SYNTHESIS

Summary. This paper presents a solution to the converse problem of dynamics when designing beam systems of desired dynamic properties. When applying known methods of mechanical system synthesis together with the inverse force and displacement method, it is difficult to obtain beam systems without making comparison between the system obtained by way of synthesis with a discrete model of the beam system being sought. Such approach results from the lack of precise evaluation of antiresonance frequency of dynamic characteristics being synthesized. Therefore, the problem of designing beam systems presented in the paper pertains to proper definition of conditions for the synthesis of continuous systems, beam systems in particular. Special attention has been paid to the effect of the selected dynamic characteristics on the results of synthesis of the systems sought. The results obtained were checked using ABC Rama computer software.