

MODELOWANIE I STEROWANIE UKŁADU KULA-BELKA

ANDRZEJ BURGHARDT, JÓZEF GIERGIEL

*Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki, Politechnika Rzeszowska
e-mail: andrzejb@prz.edu.pl, j.giergiel@chello.pl*

Streszczenie. W artykule przedstawiono modelowanie układu mechanicznego kula – belka z wykorzystaniem równań Lagrange’a II rodzaju. Przeprowadzono syntezę adaptacyjnego układu sterowania zgodnie z teorią stabilności Lapunova. Zaproponowane rozwiązanie zasymulowano w programie Matlab/Simulink oraz zweryfikowano na obiekcie rzeczywistym.

1. WSTĘP

Modelowanie oraz sterowanie nieliniowych układów mechanicznych, w których liczba niezależnych sygnałów sterowania jest mniejsza od liczby stopni swobody układu, (ang. *underactuated systems*, US) jest często analizowana w prasie przez autorów z kraju [3] jak i zagranicą [1], [8]. Najbardziej popularne układy typu US to: układ kuli toczącej się po belce, kuli toczącej się po płaszczyźnie, układ odwróconego wahadła [1], suwnice dwuwymiarowe, układy mas połączonych za pomocą sprężyn [3], łodzie podwodne [6], śmigłowce, wirnikowe urządzenia latające.

Analiza literatury z prezentowanej problematyki, w której zwrócono uwagę na fakt że, wykorzystywane w algorytmach sterowania modele matematyczne są, w celu uproszczenia, ograniczane do systemów rozważanych przy założeniach braku grawitacji, tarcia [5], [7], stała się impulsem do studium nad tematyką modelowania układów typu US. Jako model poddany analizie wybrano mechanizm kuli toczącej się po ruchomej belce.

W artykule do zamodelowania układu kula-belka wykorzystano równania Lagrange’a II rodzaju z mnożnikami. Na podstawie otrzymanego modelu matematycznego przeprowadzono syntezę adaptacyjnego algorytmu sterowania, zapewniającego stabilizację położenia kuli.

Uzyskane rozwiązanie zasymulowano w środowisku Matlab/Simulink oraz zweryfikowano poprawność stabilizacji położenia kuli na belce, stosując do tego celu zbudowany w Katedrze układ kula-belka oraz środowisko szybkiego prototypowania wykorzystujące kartę kontrolno-pomiarową dSpace oraz oprogramowanie ControlDesk.

2. MODELOWANIE

Określenie parametrów kinematycznych charakterystycznych punktów analizowanego mechanizmu pozwala w dalszych rozważaniach na określenie energii układu, a w konsekwencji zbudowanie modelu obiektu. W prezentowanym układzie belka oraz laser znajdują się w ruchu obrotowym, natomiast kulka znajduje się w ruchu złożonym, składającym się z obrotowego

ruchu unoszenia kulki względem środka przyjętego układu współrzędnych oraz ruchu płaskiego kulki względem belki.

Prędkość punktu A można wyznaczyć, korzystając z parametrycznych równań ruchu, wtedy położenie pkt. A w przyjętym układzie odniesienia można zdefiniować jako:

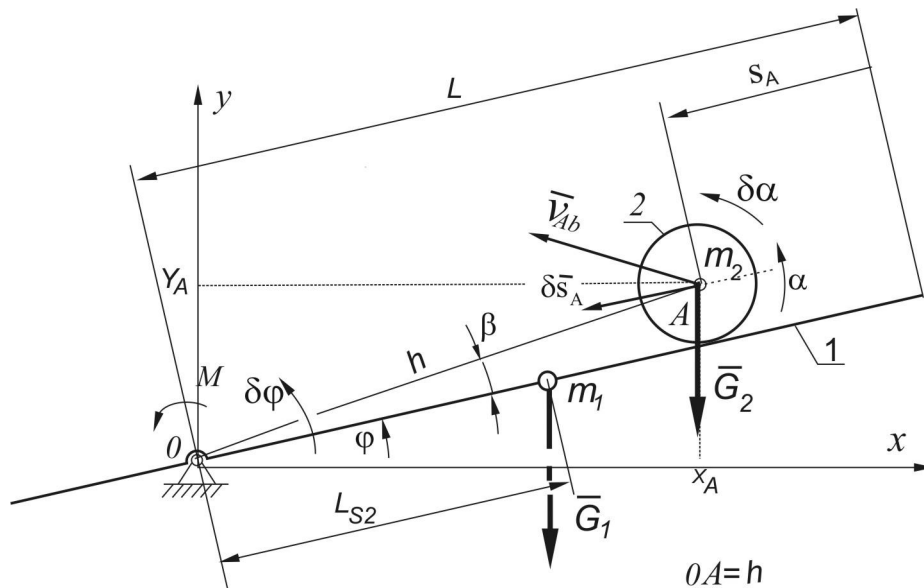
$$\begin{cases} x_A = (L - s_A) \cdot \cos \varphi - R \sin \varphi \\ y_A = (L - s_A) \cdot \sin \varphi + R \cos \varphi \end{cases} \quad (1)$$

Różniczkując (1), następnie podnosząc do kwadratu i dodając stronami, otrzymamy.

$$v_{Ab}^2 = \dot{s}_A^2 + 2 \cdot \dot{s}_A \cdot \dot{\varphi} \cdot R + \dot{\varphi}^2 h^2, \quad (2)$$

gdzie:

$$h^2 = R^2 + (L - s_A)^2.$$



Rys. 1. Obiekt kulka-belka

Energię kinetyczną układu wyznaczono jako sumę energii belki: $E_1 = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \dot{\varphi}^2$ oraz energii

kuli: $E_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_{Ab}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \dot{\alpha}^2$ jako,

$$E = \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (h^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{s}_A^2 + 2 \dot{s}_A \dot{\varphi} R). \quad (3)$$

Zakładano, że kula toczy się bez poślizgu po belce, wtedy prędkość kątowna obrotu kulki jest sumą geometryczną prędkości kątowej ruchu unoszenia i prędkości kątowej ruchu względnego, co zapisano jako:

$$\dot{\alpha} R = \dot{s}_A + \dot{\varphi} R. \quad (4)$$

Równanie więzów (4), zapisano w postaci (5),

$$J(q)\dot{q}_j = 0, \text{ gdzie } q_j = [s_A \quad \alpha \quad \varphi]^T, \quad (5)$$

a jakobian określono jako $J(q) = [1, \quad -R, \quad R]$.

Ruch układu opisano równaniami Lagrange'a II rodzaju [4]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial E}{\partial q_j} \right) = Q_j + J(q)^T \lambda \quad j=1,2,3. \quad (6)$$

Siły uogólnione wyznaczono z zależności:

$$\begin{aligned} \delta Q_1 &= G_2 \sin(\varphi) \delta s_A \\ \delta Q_2 &= 0 \\ \delta Q_3 &= [M - G_1 L_{S2} \cos(\varphi) - G_2 (L - s_A) \cos(\varphi)] \delta \varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Ostatecznie dynamiczne równania ruchu zapisano w postaci:

$$\begin{aligned} m_2 R \ddot{\varphi} + m_2 \ddot{s}_A + m_2 (L - s_A) \dot{\varphi}^2 &= m_2 g \sin(\varphi) + \lambda \\ I_2 \ddot{\alpha} &= -R \lambda \\ \left\{ I_1 + m_2 [R^2 + (L - s_A)^2] \right\} \ddot{\varphi} + m_2 R \ddot{s}_A - 2m_2 \dot{s}_A \dot{\varphi} (L - s_A) &= -G_1 L_{S2} \cos(\varphi) - G_2 (L - s_A) \cos(\varphi) + R \lambda \end{aligned} \quad (8)$$

Wybrano spośród trzech prędkości uogólnionych $\dot{q} = [\dot{s}_A \quad \dot{\alpha} \quad \dot{\varphi}]^T$ związanych równaniem więzów (4) dwie niezależne (w naszym obiekcie fizycznie mierzalne) $\dot{q}_M = [\dot{s}_A \quad \dot{\varphi}]^T$ i równanie (4) zapisano jako:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R^{-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_A \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = K \dot{q}_M, \quad K = \text{const.} \quad (9)$$

Zapiszmy równanie (8) w postaci

$$M_q \ddot{q} + d_q = Q_q + J(q)^T \lambda, \quad (10)$$

wtedy równania ruchu zapisać możemy następująco

$$K^T M_q K \ddot{q}_M + K^T d_q = K^T Q_q \Leftrightarrow M \ddot{q}_M + d_M = Q_M, \quad (11)$$

gdzie: $M = K^T M_q K$, $d_M = K^T d_q$, $Q_M = K^T Q_q$. Zaprezentowany wynik odpowiada sformułowaniu rzutowemu (postaci macierzowej) równań Gibbsa-Appella, Maggi'ego lub Kane'a [2].

Otrzymane równanie w postaci (11) zapisano w formie równania dynamiki, dobierając macierz współczynników sił odśrodkowych i sił Coriolisa tak, aby macierz $\dot{M} - 2C$ była macierzą skośnieszymetryczną i otrzymano:

$$M\ddot{q}_M + C\dot{q}_M + G = Q_s, \quad (12)$$

gdzie: M – macierz mas uogólnionych,

$$M = \begin{bmatrix} m_2 + \frac{I_2}{R^2} & m_2 \cdot R + I_2 R^{-1} \\ m_2 \cdot R + I_2 R^{-1} & I_1 + I_2 + m_2 [R^2 + (L - s_A)^2] \end{bmatrix}, \quad (13)$$

C – macierz współczynników sił odśrodkowych i sił Coriolisa,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & m_2 \cdot (L - s_A) \dot{\varphi} \\ -m_2 (L - s_A) \dot{\varphi} & -m_2 (L - s_A) \dot{s}_A \end{bmatrix}, \quad (14)$$

G – wektor sił ciężkości,

$$G = \begin{bmatrix} -m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi) \\ L_{S2} m_1 g \cos(\varphi) + m_2 g (L - s_A) \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

Q_s – wektor sił uogólnionych,

$$Q_s = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Zdefiniowane równanie (12) opisujące dynamikę obiektu zostało wykorzystane do analizy zadania odwrotnego dynamiki podczas syntezy algorytmu sterowania oraz jako zadanie proste dynamiki podczas badań symulacyjnych algorytmu sterującego położeniem kuli.

3. STEROWANIE

Układ sterowania nieliniowym obiektem kula-belka ma za zadanie zapewnić osiągnięcie położenia kuli, zdefiniowanego jako sygnał zadany $q_d = [\varphi_d \ s_{Ad}]^T$. Wykorzystując matematyczny opis obiektu (12), przeprowadzono syntezę adaptacyjnego algorytmu sterowania, wyznaczono prawo sterowania u oraz prawo adaptacji wektora parametrów a . Jako elementy wektora parametrów a przyjęto: $a_1 = m_2$, $a_2 = I_2 / R^2$, $a_3 = m_2 R$, $a_4 = I_2 R^{-1}$, $a_5 = I_1 + I_2 + m_2 R^2$, $a_6 = m_1 L_{S2}$. W pracy, wybierając wektor parametrów, założono, że algorytm adaptacyjny będzie sterował kulami o różnej masie i różnym promieniu. Sparаметryzowaną postać równania dynamiki obiektu zapisano:

$$M(a, s_A) \ddot{q}_M + C(a, s_A, \dot{s}_A, \dot{\varphi}) \dot{q}_M + G(a, s_A, \varphi) = u. \quad (17)$$

Zakładając, macierz projektową $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2]$ o dodatnich elementach, zdefiniowano błąd stabilizacji kuli $e = [e_1, e_2]^T$ oraz uogólniony błąd stabilizacji kuli $s = [s_1, s_2]^T$, w postaci:

$$e = q_d - q_M, \quad s = \dot{e} + \lambda e. \quad (18)$$

Różniczkując zależność (18) i uwzględniając zależność (19), otrzymano

$$M(a, s_A) \dot{s} = -C(a, s_A, \dot{s}_A, \dot{\varphi})s + f(z) - u, \quad (19)$$

gdzie $f(z)$ jest wektorem kompensującym nieliniowości obiektu i jest równe

$$f(z) = M(a, s_A) \dot{v} + C(a, s_A, \dot{s}_A, \dot{\varphi})v + G(a, s_A, \varphi), \quad (20)$$

a wprowadzone do równania (20) zależności $v = [v_1, v_2]^T$ i \dot{v} zdefiniowano następująco

$$v = \dot{q}_d + \Lambda e, \quad \dot{v} = \ddot{q}_d + \Lambda \dot{e}. \quad (21)$$

Nieliniową funkcję (20) zapisano w postaci liniowej ze względu na parametry

$$f(z) = Ya, \quad (22)$$

a jej ocenę jako

$$\hat{f}(z) = Y\hat{a}, \quad (23)$$

gdzie:

$$Y = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 + V_2(L - s_A)\dot{\varphi} - g \sin(\varphi) & \dot{V}_1 & \dot{V}_2 & \dot{V}_2 & 0 & 0 \\ \dot{V}_2(L - s_A)^2 - (L - s_A)(\dot{\varphi}V_1 + \dot{s}_A V_2 - g \cdot \cos(\varphi)) & 0 & \dot{V}_1 & \dot{V}_1 & \dot{V}_2 & g \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Projektując $K_D = \text{diag}[k_1, k_2]$, przyjęto prawo sterowania w postaci

$$U = Y\hat{a} + K_D s. \quad (25)$$

Drugi wiersz równania macierzowego (26) pozwala na wyznaczenie kąta φ

$$\dot{V}_1(\hat{a}_1 + \hat{a}_2) + \dot{V}_2(\hat{a}_3 + \hat{a}_4) + V_2\hat{a}_1(L - s_A)\dot{\varphi} - \hat{a}_1 g \cdot \sin(\varphi) + k_1 s_1 = 0. \quad (26)$$

Przyjmując, że $s_2 = v_2 - \dot{\varphi}$, zależność (26), zapisano w postaci (27)

$$\varphi = \arcsin \left\{ \frac{1}{g\hat{a}_1} \left[\dot{V}_1(\hat{a}_1 + \hat{a}_2) + \dot{V}_2(\hat{a}_3 + \hat{a}_4) + V_2\hat{a}_1(L - s_A)(V_2 - s_2) + k_1 s_1 \right] \right\} \quad \text{i } \hat{a}_1 \neq 0. \quad (27)$$

Pierwszy wiersz macierzy prawa sterowania (25) ma postać:

$$u = Y_2 \hat{a} + k_2 s_2 . \quad (28)$$

Jeżeli przyjmiemy prawo adaptacji w postaci (29)

$$\dot{\hat{a}} = -\Gamma^{-1} \cdot Y^T \cdot s , \quad (29)$$

to stosując teorię stabilności Lapunova, dla funkcji dodatnio określonej

$$L = \frac{1}{2} s^T M(a, q) s + \frac{1}{2} \tilde{a}^T \Gamma^{-1} \tilde{a} , \quad (30)$$

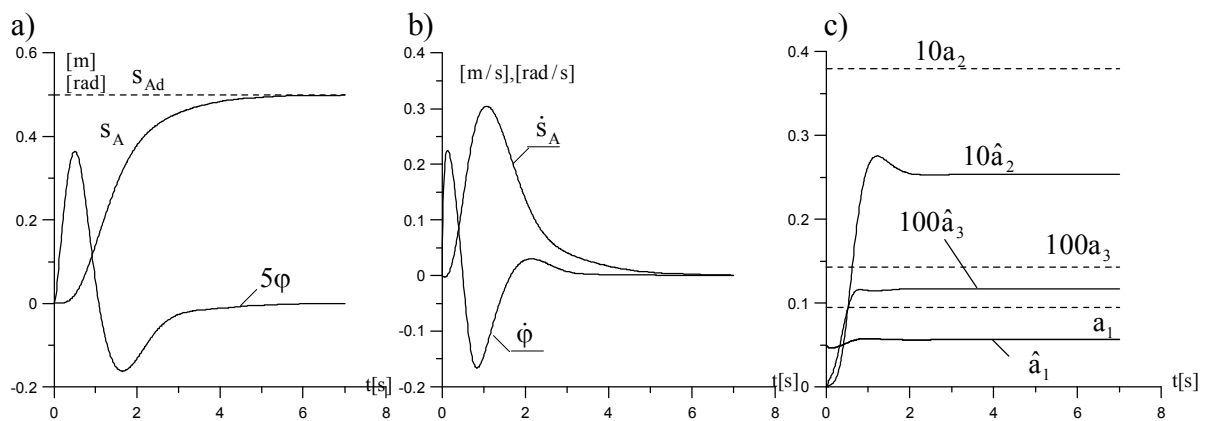
można wykazać, że

$$\dot{L} = -s^T K s \leq 0 , \quad (31)$$

oznacza to, że badany układ jest stabilny asymptotycznie tzn. dla $t \rightarrow \infty$, $s \rightarrow 0$, a estymowane parametry są ograniczone.

4. SYMULACJA

Proponowane rozwiązanie układu sterowania zasymulowano w programie Matlab/Simulink, wykorzystując zbudowany emulator układu kula-belka. Przyjęte wartości mas oraz wielkości geometryczne odpowiadają rzeczywistej konstrukcji. Parametry układu użyte podczas symulacji, $R = 0,015[m]$, $m_2 = 0,094[kg]$, $m_1 = 0,29[kg]$, $L = 1[m]$, $L_{S_2} = 0,14[m]$, $I_1 = 0,0951[kgm^2]$, $I_2 = 8,5 \cdot 10^{-6}[kgm^2]$.



Rys. 2. Wyniki symulacji: a, b – parametry ruchu c – parametry estymowane

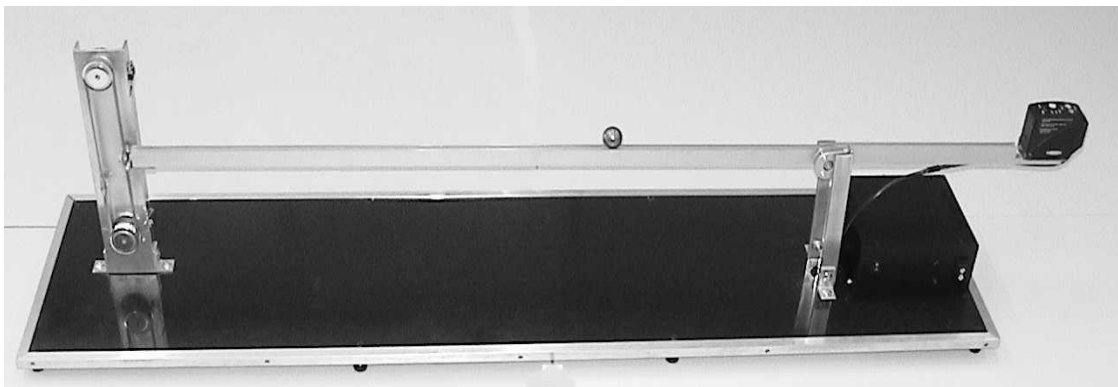
Masowy moment bezwładności belki oraz czujnika laserowego wyznaczono w pierwszym przybliżeniu, modelując rozkład mas tych elementów skupioną masą punktową. Założono, że kula z warunkiem początkowym $s_A = 0$ będzie osiągać pozycję $s_{Ad} = 0,5[m]$.

Na rys. 2a przedstawiono wyniki symulacji osiągania wartości zadanej, położenie kuli oraz kąt obrotu belki, natomiast na rys. 2b przedstawiono prędkość liniową punktu A (środką kuli) oraz prędkość kątową belki. Rys.2c przedstawia estymaty wybranych parametrów obiektu

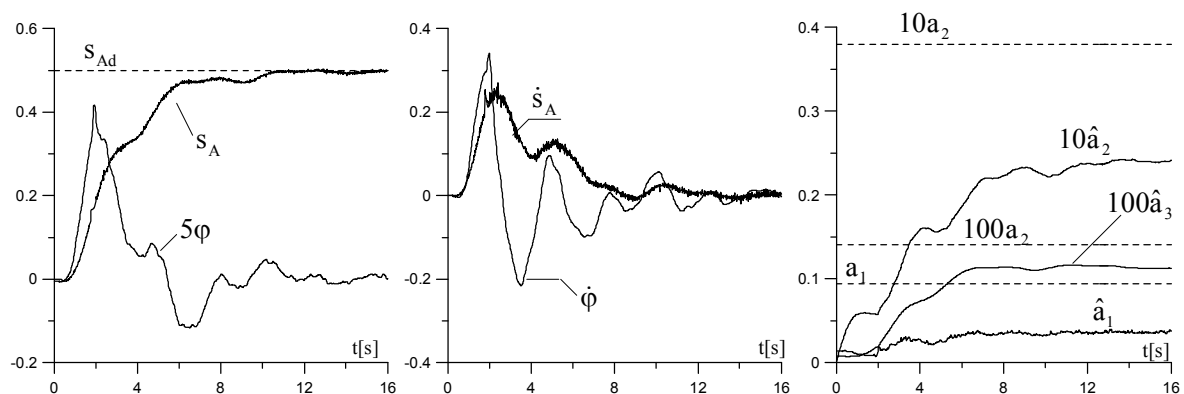
uzyskane w procesie adaptacji. Na rys.2c przedstawiono za pomocą linii przerywanej estymowane parametry Niepełna estymacja wartości parametrów wynika z niewystarczającego pobudzenia obiektu.

4. WERYFIKACJA

W celu zweryfikowania zaproponowanego algorytmu sterowania zbudowano układ mechaniczny kula-belka pokazany na rys.3. Jako układ napędzający wykorzystano silnik prądu stałego zintegrowany z przekładnią oraz przetwornikiem obrotowo-impulsowym, a do pomiaru położenia kuli wykorzystano laserowy czujnik odległości. Jako środowisko kontrolno-programowe wykorzystano oprogramowanie ControlDesk, Matlak/Simulink oraz kartę dSpace 1104.



Rys. 3. Zdjęcie układu mechanicznego kulka-belka



Rys. 4. Wyniki symulacji: a, b – parametry ruchu c – parametry estymowane

Na rys. 3a przedstawiono wyniki weryfikacji realizacji zadania osiągnięcia wartości zadanej, położenie kuli oraz kąt obrotu belki, natomiast na rys. 3b przedstawiono prędkość liniową punktu A oraz prędkość kątową belki. Na rys. 2c przedstawiono estymaty wybranych parametrów obiektu uzyskane w procesie adaptacji. Analogicznie jak w symulacji niepełna estymacja wartości parametrów wynika z niewystarczającego pobudzenia obiektu.

5. PODSUMOWANIE

Zaprezentowane podejście do procesu modelowania obiektu typu US z wykorzystaniem równań Lagrange'a umożliwiło otrzymanie modelu matematycznego w formie umożliwiającej jego wykorzystanie w procesie syntezy adaptacyjnego algorytmu sterowania. Ponadto otrzymany model matematyczny zastosowano do budowy emulatora obiektu kula-belka, który był wykorzystywany podczas badań symulacyjnych.

Zaproponowany algorytm sterowania pozwolił na stabilizację pozycji kuli na belce, co wykazano w badaniach symulacyjnych oraz podczas weryfikacji na obiekcie rzeczywistym.

Dalsze prace wykorzystujące zaproponowany model będą prowadzone w kierunku nie tylko stabilizacji pozycji kuli, ale również w kierunku sterowania nadążnego ruchem kuli po belce.

LITERATURA

1. Anthony M. Bloch, Naomi Ehrich Leonard, Jerrold E. Marsden: Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems In: The First Matching Theorem, "IEEE Transactions on Automatic Control", 2000, Vol. 45, No. 12.
2. Blajer W.: Metody dynamiki układów wieloczłonowych. Radom 1998.
3. Blajer W., Kołodziejczyk K.: Control of underactuated mechanical systems with servo-constraints. *Nonlinear Dyn.*, Springer Science, 2007, p. 781–791.
4. Gutowski R.: *Mechanika analityczna*. Warszawa : PWN, 1971.
5. Kiss B., Levine J., & Mullhaupt Ph.: Modelling, eatness and simulation of a class of cranes. "Periodica Polytechnica" 1999, 43(3), p. 215–225.
6. Leonard, N.E.: Stability of a bottom-heavy underwater vehicle. "Automatica" 1997, 33, p. 331-346.
7. Lewis A. D., & Murray R. M.: Configuration controllability of simple mechanical control systems. "SIAM Journal on Control and Optimization" 1997, 35(3), p. 766–790.
8. M.W. Spong. Underactuated mechanical systems. In: B. Siciliano and K.P. Valavanis (eds): *Control Problems in Robotics and Automation, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 230, Springer, UK, 1997.

MODELING AND CONTROL OF NONHOLONOMIC BALL AND BEAM SYSTEMS

Summary. The ball-and-beam problem is a benchmark for testing control algorithms. This paper we presents analysis and implementation adaptive control schemes on ball and beam system. Dynamic model for the system was derived using Lagrange equations. Control algorithm solves a stabilization under-actuated ball and beam system was created by using Lyapunov theory. The controllers designed for the system have been simulated by Matlab/Simulink.