

## ZASTOSOWANIE MACIERZY PRZEJŚCIA W MODELOWANIU UKŁADÓW ZŁOŻONYCH

ANDRZEJ BUCHACZ  
ANDRZEJ WRÓBEL

*Instytut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania, Politechnika Śląska  
e-mail: andrzej.wrobel@polsl.pl, andrzej.buchacz@polsl.pl*

**Streszczenie.** Podnoszenie sprawności i niezawodności maszyn i urządzeń jest głównym celem pracy inżynierów i naukowców podczas procesu projektowania. W wielu gałęziach przemysłu istotnym problemem jest również miniaturyzacja istniejących układów [4]. W ostatnich latach coraz częściej rozwój ten dotyczy nowych technologii bazujących na zjawisku piezoelektrycznym. W artykule przedstawiono metodę wyznaczania macierzy zawierającej elementy charakterystyczne jednej płytki piezoelektrycznej stanowiące podstawę do dalszej analizy układów złożonych. Niniejszy artykuł jest autorskim pomysłem obliczania układów złożonych z wielu elementów [1]. Podstawą obliczeń jest metoda macierzy przejścia wykorzystana do wyznaczenia charakterystycznych parametrów układów bimorficznych.

### 1. MODEL PŁYTKI PIEZOELEKTRYCZNEJ

Tematem rozważań jest płytka piezoelektryczna o parametrach rozłożonych w sposób ciągły, której lewy i prawy koniec jest swobodny. Przyjęto, że oznaczenia,  ${}_1s_1^{(i)}$ ,  ${}_1s_2^{(i)}$  stanowią odpowiedzi układu na wymuszenia  ${}_2s_1^{(i)}$ ,  ${}_2s_2^{(i)}$ . Rozważa się drgania wzdłużne płytki piezoelektrycznej, opisywane w literaturze również jako drgania grubościowe [2,3]. Zależności pomiędzy wielkościami  ${}_1s_1^{(i)}$ ,  ${}_1s_2^{(i)}$  i  ${}_2s_1^{(i)}$ ,  ${}_2s_2^{(i)}$  przedstawiono następująco:

$${}_1S^{(i)} = Y^{(i)} {}_2S^{(i)}, \quad (1)$$

gdzie:

$${}_1S^{(i)} = \{ {}_1s_1^{(i)}, {}_1s_2^{(i)} \},$$
$${}_2S^{(i)} = \{ {}_2s_1^{(i)}, {}_2s_2^{(i)} \},$$

$Y$  jest macierzą charakterystyk układu.

Zależność (1) została wyprowadzona w poprzedniej publikacji autorów [1], zapisana w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} {}_1S_1^{(i')} \\ {}_1S_2^{(i')} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{(i)} & Y_{12}^{(i)} \\ Y_{21}^{(i)} & Y_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2S_2^{(i')} \\ {}_2S_2^{(i')} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

W celu określenia zależności występujących w płytce piezoelektrycznej niezbędne jest odwrócenie macierzy (2) do postaci:

$${}_2S^{(i')} = Z' {}_1S^{(i')}, \quad (4)$$

przy czym szczegółowy zapis operacji odwrócenia macierzy łącznie z określeniem składowych zapisano:

$$Z_{ij}^{(i')} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{(i')} & Z_{12}^{(i')} \\ Z_{21}^{(i')} & Z_{22}^{(i')} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^{(i')} & Y_{12}^{(i')} \\ Y_{21}^{(i')} & Y_{22}^{(i')} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (5)$$

Uwzględniając przekształcenia (5), zapisano:

$$\begin{cases} {}_2S_1^{(i')} = Z_{11}^{(i')} {}_1S_1^{(i')} + Z_{12}^{(i')} {}_1S_2^{(i')} \\ {}_2S_2^{(i')} = Z_{21}^{(i')} {}_1S_1^{(i')} + Z_{22}^{(i')} {}_1S_2^{(i')} \end{cases}. \quad (6)$$

W celu zachowania zgodności oznaczeń z poprzednimi opracowaniami dotyczącymi układów mechanicznych [1] wprowadzono uproszczenia literowe:

$$\begin{cases} Z_{11}^{(i')} = Z_a^{(i)}, \\ Z_{12}^{(i')} = Z_c^{(i)}, \\ Z_{21}^{(i')} = Z_d^{(i)}, \\ Z_{22}^{(i')} = Z_b^{(i)}, \end{cases} \quad (7)$$

oraz przyjęto, że analiza układu zastępczego będzie wykonywana na symbolach, w których zastąpiono indeksy cyfrowe symboliką literową.

$$\begin{bmatrix} {}_1S_1^{(i')} \\ {}_1S_2^{(i')} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a^{(i)} & Y_c^{(i)} \\ Y_d^{(i)} & Y_b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2S_2^{(i')} \\ {}_2S_2^{(i')} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Wykorzystując wzór (5), wyprowadzono zależności pomiędzy  $Z$  a  $Y$  w formie:

$$\begin{cases} Z_a^{(i)} = \frac{Y_b^{(i)}}{Y^{(i)}}, \\ Z_b^{(i)} = \frac{Y_a^{(i)}}{Y^{(i)}}, \\ Z_c^{(i)} = \frac{Y_d^{(i)}}{Y^{(i)}}, \\ Z_d^{(i)} = \frac{Y_c^{(i)}}{Y^{(i)}}, \end{cases} \quad (9)$$

gdzie:  $Y^{(i)} = Y_a^{(i)} Y_b^{(i)} - Y_c^{(i)} Y_d^{(i)}$ .

Przedstawione charakterystyki układu płytki piezoelektrycznej są podstawą określenia równań łańcuchowych.

## 2. MODEL PŁYTKI PIEZOELEKTRYCZNEJ

W niniejszym rozdziale przedstawiono równania łańcuchowe, które wykorzystywane są w dalszej analizie układów złożonych metodą macierzy przejścia. Przekształcając macierz (8) do postaci łańcuchowej, otrzymano macierz w formie:

$$\begin{bmatrix} {}_2s_1^{(i)'} \\ {}_1s_1^{(i)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} \\ A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2s_2^{(i)'} \\ {}_1s_2^{(i)'} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

W celu wyznaczenia składowych macierzy (10) obliczono  ${}_2s_1^{(i)'}$ , a następnie zapisano jako:

$$\begin{cases} {}_1s_1^{(i)'} = Y_a^{(i)} {}_2s_1^{(i)'} + Y_c^{(i)} {}_2s_2^{(i)'} \\ {}_2s_1^{(i)'} = \frac{{}_1s_2^{(i)'} - Y_b^{(i)} {}_2s_2^{(i)'}}{Y_d^{(i)}} \end{cases}. \quad (11)$$

Wprowadzając obliczoną wartość  ${}_2s_1^{(i)'}$  otrzymano:

$$\begin{cases} {}_1s_1^{(i)'} = Y_a^{(i)} \left( \frac{{}_1s_2^{(i)'} - Y_b^{(i)} {}_2s_2^{(i)'}}{Y_d^{(i)}} \right) + Y_c^{(i)} {}_2s_2^{(i)'} \\ {}_2s_1^{(i)'} = \frac{{}_1s_2^{(i)'} - Y_b^{(i)} {}_2s_2^{(i)'}}{Y_d^{(i)}} \end{cases}. \quad (12)$$

Po wymnożeniu składników w nawiasach i zgrupowaniu wyrazów podobnych oraz sprowadzając do formy (10), układ równań zapisano:

$$\begin{cases} {}_2s_1^{(i')} = \frac{1}{Y_d^{(i)}} {}_1s_2^{(i')} - \frac{Y_b^{(i)}}{Y_d^{(i)}} {}_2s_2^{(i')} \\ {}_1s_1^{(i')} = \frac{Y_a^{(i)}}{Y_d^{(i)}} {}_1s_2^{(i')} + \left( \frac{Y_c^{(i)} Y_d^{(i)} - Y_a^{(i)} Y_b^{(i)}}{Y_d^{(i)}} \right) {}_2s_2^{(i')} \end{cases}, \quad (13)$$

lub w formie macierzowej jak (10), gdzie, wyznaczone współczynniki równania łańcuchowego przedstawiono następująco:

$$\begin{cases} A_{11}^{(i)} = -\frac{Y_b^{(i)}}{Y_d^{(i)}}, \\ A_{12}^{(i)} = \frac{1}{Y_d^{(i)}}, \\ A_{21}^{(i)} = \frac{Y_c^{(i)} Y_d^{(i)} - Y_a^{(i)} Y_b^{(i)}}{Y_d^{(i)}}, \\ A_{22}^{(i)} = \frac{Y_a^{(i)}}{Y_d^{(i)}}. \end{cases} \quad (14)$$

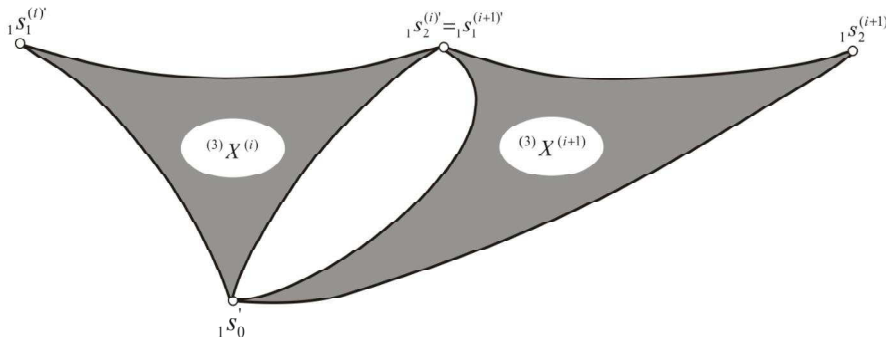
Ostatecznie otrzymano równanie łańcuchowe płytki piezoelektrycznej w postaci:

$$\begin{cases} {}_2s_1^{(i')} = A_{11}^{(i)} {}_2s_2^{(i')} + A_{12}^{(i)} {}_1s_2^{(i')} \\ {}_1s_1^{(i')} = A_{21}^{(i)} {}_2s_2^{(i')} + A_{22}^{(i)} {}_1s_2^{(i')} \end{cases}, \quad (15)$$

Wyznaczony układ równań (18) jest podstawą analizy złożonych układów mechatronicznych.

## 2. RÓWNANIE ŁAŃCUCHOWE UKŁADU ZŁOŻONEGO

Na rys. 1 przedstawiono model układu bimorficznego złożonego z dwóch płytek piezoelektrycznych. Indeksami górnymi  $(i)$  oraz  $(i+1)$  oznaczono kolejność układów.



Rys. 1 Schemat połączonych dwóch elementów piezoelektrycznych i zależności między nimi

Równanie macierzowe pierwszego układu oznaczonego indeksem  $(i)$  zapisano jako:

$$\begin{bmatrix} {}_1s_1^{(i')} \\ {}_1s_2^{(i')} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a^{(i)} & Y_c^{(i)} \\ Y_d^{(i)} & Y_b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2s_2^{(i')} \\ {}_2s_2^{(i')} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

natomiast drugiego oznaczonego indeksem  $(i + 1)$  jako:

$$\begin{bmatrix} {}_1S_1^{(i+1)} \\ {}_1S_2^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a^{(i+1)} & Y_c^{(i+1)} \\ Y_d^{(i+1)} & Y_b^{(i+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2S_1^{(i+1)} \\ {}_2S_2^{(i+1)} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

W wyniku zastosowania przekształceń (11-15) otrzymano układ równań łańcuchowych podukładu  $(i)$  w postaci :

$$\begin{cases} {}_2S_1^{(i)} = A_{11}^{(i)} {}_2S_2^{(i)} + A_{12}^{(i)} {}_1S_2^{(i)}, \\ {}_1S_1^{(i)} = A_{21}^{(i)} {}_2S_2^{(i)} + A_{22}^{(i)} {}_1S_2^{(i)}, \end{cases} \quad (18)$$

oraz podukładu  $(i + 1)$  :

$$\begin{cases} {}_2S_1^{(i+1)} = A_{11}^{(i+1)} {}_2S_2^{(i+1)} + A_{12}^{(i+1)} {}_1S_2^{(i+1)}, \\ {}_1S_1^{(i+1)} = A_{21}^{(i+1)} {}_2S_2^{(i+1)} + A_{22}^{(i+1)} {}_1S_2^{(i+1)}. \end{cases} \quad (19)$$

W celu wyznaczenia macierzy przejścia, oznaczonej jako  $B$ , zastosowano takie połączenie, w którym wejścia podukładu drugiego  $(i + 1)$  są przyłączone do wyjść podukładu pierwszego, oznaczonego jako  $(i)$ . Założenie to przedstawiono w formie matematycznego zapisu w postaci:

$${}_2S_2^{(i)} = {}_2S_1^{(i+1)}, \quad {}_1S_2^{(i)} = {}_1S_1^{(i+1)}. \quad (20)$$

Stosując założenia (20) do wzoru (10) oraz podukładu  $(i + 1)$ :

$$\begin{bmatrix} {}_2S_1^{(i+1)} \\ {}_1S_1^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(i+1)} & A_{12}^{(i+1)} \\ A_{21}^{(i+1)} & A_{22}^{(i+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2S_2^{(i+1)} \\ {}_1S_2^{(i+1)} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

otrzymano wzór określający zależności parametrów łańcuchowych układu złożonego:

$$B = \begin{bmatrix} {}_2S_1^{(i)} \\ {}_1S_1^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(i)} & A_{12}^{(i)} \\ A_{21}^{(i)} & A_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{(i+1)} & A_{12}^{(i+1)} \\ A_{21}^{(i+1)} & A_{22}^{(i+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2S_2^{(i+1)} \\ {}_1S_2^{(i+1)} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

Po wyprowadzeniu równania (22) stwierdzono, że macierz łańcuchowa o strukturze kaskadowej jest iloczynem macierzy łańcuchowych poszczególnych ogniw układu złożonego. Wyznaczoną macierz przejścia  $B$  zaprezentowano jako:

$$B = \begin{bmatrix} {}_2S_1^{(i)} \\ {}_1S_1^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(i+1)} A_{11}^{(i)} + A_{12}^{(i)} A_{21}^{(i+1)} & A_{11}^{(i)} A_{12}^{(i+1)} + A_{12}^{(i)} A_{22}^{(i+1)} \\ A_{21}^{(i)} A_{11}^{(i+1)} + A_{22}^{(i)} A_{21}^{(i+1)} & A_{21}^{(i)} A_{12}^{(i+1)} + A_{22}^{(i)} A_{22}^{(i+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2S_2^{(i+1)} \\ {}_1S_2^{(i+1)} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Podstawiając wyznaczone współczynniki (14), otrzymano końcową postać macierzy przejścia jako:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

gdzie:

$$\begin{cases} B_{11}^{(k)} = \frac{Y_b^{(i)}Y_b^{(i+1)} - Y_a^{(i+1)}Y_b^{(i+1)} + Y_c^{(i+1)}Y_d^{(i+1)}}{Y_d^{(i)}Y_d^{(i+1)}}, \\ B_{12}^{(k)} = -\frac{Y_b^{(i)} + Y_a^{(i+1)}}{Y_d^{(i)}Y_d^{(i+1)}}, \\ B_{21}^{(k)} = \frac{(-Y_a^{(i)}Y_b^{(i)} + Y_c^{(i)}Y_d^{(i)})Y_b^{(i+1)}}{Y_d^{(i)}Y_d^{(i+1)}} + \frac{Y_a^{(i)}(-Y_a^{(i+1)}Y_b^{(i+1)} + Y_c^{(i+1)}Y_d^{(i+1)})}{Y_d^{(i)}Y_d^{(i+1)}}, \\ B_{22}^{(k)} = \frac{-Y_a^{(i)}Y_b^{(i)} + Y_c^{(i)}Y_d^{(i)} + Y_a^{(i)}Y_a^{(i+1)}}{Y_d^{(i)}Y_d^{(i)}}. \end{cases} \quad (25)$$

W celu uzyskania charakterystyk układu złożonego dokonano przekształcenia obliczonych współczynników równania łańcuchowego (25) do podstawowej postaci:

$$\begin{bmatrix} {}_1s_1^{(i)'} \\ {}_1s_2^{(i)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a^{(i)} & Y_c^{(i)} \\ Y_d^{(i)} & Y_b^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2s_1^{(i)'} \\ {}_2s_2^{(i)'} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

Przyjęto, że podstawą przekształceń są równania macierzowe:

$$B = \begin{bmatrix} {}_2s_1^{(k)'} \\ {}_1s_1^{(k)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2s_2^{(k)'} \\ {}_1s_2^{(k)'} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

zapisane w postaci układu równań:

$$\begin{cases} {}_2s_1^{(k)'} = B_{11}^{(k)} {}_2s_2^{(k)'} + B_{12}^{(k)} {}_1s_2^{(k)'}, \\ {}_1s_1^{(k)'} = B_{21}^{(k)} {}_2s_2^{(k)'} + B_{22}^{(k)} {}_1s_2^{(k)'}, \end{cases} \quad (28)$$

z którego wyznaczono  ${}_1s_2^{(k)'}$ :

$${}_1s_2^{(k)'} = \frac{{}_1s_1^{(i)'} - B_{21}^{(k)} {}_2s_2^{(k)'}}{B_{22}^{(k)}}. \quad (29)$$

Podstawiając obliczone wyrażenie (29) do (28) oraz grupując wyrażenia:

$$\begin{cases} {}_2s_1^{(k)'} = \frac{B_{12}^{(k)}}{B_{22}^{(k)}} {}_1s_1^{(i)'} + {}_2s_2^{(k)'} \left( B_{11}^{(k)} - \frac{B_{12}^{(k)} B_{21}^{(k)}}{B_{22}^{(k)}} \right), \\ {}_1s_2^{(k)'} = \frac{{}_1s_1^{(i)'} - B_{21}^{(k)} {}_2s_2^{(k)'}}{B_{22}^{(k)}}, \end{cases} \quad (30)$$

oraz przenosząc wyznaczone  ${}_1s_1^{(k)'}$  na lewą stronę równania, otrzymano:

$$\begin{cases} {}_1s_1^{(k)'} = \left[ {}_2s_1^{(k)'} - {}_2s_2^{(k)'} \left( B_{11}^{(k)} - \frac{B_{12}^{(k)} B_{21}^{(k)}}{B_{22}^{(k)}} \right) \right] \frac{B_{22}^{(k)}}{B_{12}^{(k)}}, \\ {}_1s_2^{(k)'} = \frac{{}_1s_1^{(i)'} - B_{21}^{(k)} {}_2s_2^{(k)'}}{B_{22}^{(k)}}. \end{cases} \quad (31)$$

Obliczoną wartość  ${}_1s_1^{(k)'}$  wstawiono do drugiego równania i zgrupowano wyrazy podobne:

$$\begin{cases} {}_1s_1^{(k)'} = \left[ {}_2s_1^{(k)'} - {}_2s_2^{(k)'} \left( B_{11}^{(k)} - \frac{B_{12}^{(k)} B_{21}^{(k)}}{B_{22}^{(k)}} \right) \right] \frac{B_{22}^{(k)}}{B_{12}^{(k)}}, \\ {}_1s_2^{(k)'} = \frac{1}{B_{12}^{(k)}} {}_2s_1^{(k)'} - {}_2s_2^{(k)'} \frac{B_{11}^{(k)}}{B_{12}^{(k)}}, \end{cases} \quad (32)$$

otrzymując szukaną macierz charakterystyk w formie (26), gdzie:

$$Y_a^{(k)} = \frac{B_{22}^{(k)}}{B_{12}^{(k)}}, \quad Y_c^{(k)} = -\frac{B_{11}^{(k)} B_{22}^{(k)}}{B_{12}^{(k)}} - B_{21}^{(k)}, \quad (33)$$

$$Y_d^{(k)} = \frac{1}{B_{12}^{(k)}}, \quad Y_b^{(k)} = \frac{B_{11}^{(k)}}{B_{12}^{(k)}}. \quad (34)$$

Przedstawione wzory (33) i (34) są składowymi macierzy charakterystyk układu złożonego z uwzględnieniem wyznaczonych parametrów łańcuchowych układu połączonego.

Praca była prowadzona jak część programu badawczego N 501 324 535 finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, 2008-2009

#### LITERATURA

1. Buchacz A.: , Wróbel A.: Homogenization of mechatronical systems in modeling piezoelectric layer, Friction, Warszawa 2008, w ramach projektu N 502 071 31/3719.
2. Shin H., H. Ahn, Han D.Y.: Modeling and analysis of multilayer piezoelectric transformer. "Materials chemistry and physics" 2005, 92, p. 616-620
3. Li G.Q., Chen Chuan-Yao, Hu Yuan-Tai.: Equivalent electric circuits of thin plates with two-dimensional piezoelectric actuators. "Journal of Sound and Vibration" 2005, 286, p. 145-165.
4. Kacprzyk R., Motyl E., Gajewski J.B., Pasternak A.: Piezoelectric properties of nonuniform electrets. "Journal of Electrostatics" 1995, 35, p. 161-166.

### **APPLICATION OF TRANSFORM MATRIX IN COMPLEX SYSTEM MODELING**

Summary. Main purpose of engineers and scientists work during projecting process is efficiency and reliability of machines and devices improvements. In many industrial branches crucial problem is also miniaturization of existing systems. In recent years more frequently this development concerns new technologies based on piezoelectric effect. In present paper determination of matrixes will be present. Those matrixes will contain characteristic elements of piezoelectric plate, which are basis of further analysis of complex systems.

This article is authority idea of determination of systems composed of many elements. The foundation of evaluation is matrix of transforming method used for characteristic parameters of biomorphic systems.