

CIĄG DYSKRETNO – CIĄGŁYCH MODELI MATEMATYCZNYCH UKŁADU MECHATRONICZNEGO

ANDRZEJ BUCHACZ, MAREK PŁACZEK

*Institut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania,
Politechnika Śląska
e-mail: andrzej.buchacz@polsl.pl, marek.placzek@polsl.pl*

Streszczenie. W opracowaniu zaprezentowano sprawozdanie z wyników dotychczasowych prac autorów dotyczących modelowania oraz badania charakterystyk dynamicznych drgających jednowymiarowych układów mechatronicznych modelowanych ciągiem dyskretno-ciągłych modeli matematycznych. Stosowane modele matematyczne różnią się stopniem przybliżeń układu rzeczywistego i mają na celu określenie wpływu stopnia uproszczenia stosowanego modelu na dokładność uzyskiwanych wyników

1. WSTĘP

Stosowane w pracy modele matematyczne badanego układu mechatronicznego drgającego giętnie różnią się stopniem przybliżeń układu rzeczywistego, a mianowicie w realizowanych pracach uwzględniano wpływ na charakterystykę dynamiczną badanego układu warstwy łączącej przetwornik z układem mechanicznym lub też pomijano go, zakładając idealne przytwierdzenie przetwornika. Pomijano również wpływ tłumienia wewnętrznego materiałów tworzących badany układ lub też uwzględniano ich właściwości reologiczne poprzez zastosowanie modelu Kelvina-Voigta. Badania przeprowadzono w celu określenia wpływu stopnia uproszczenia stosowanego modelu matematycznego na wartości uzyskiwanych wyników w postaci przebiegu charakterystyki dynamicznej badanego układu i wskazania, w jakim stopniu dalsze uszczegółowienie stosowanego modelu, wiążące się ze wzrostem złożoności obliczeń i koniecznością stosowania zaawansowanego aparatu matematycznego, przekłada się na dokładność odwzorowania układu rzeczywistego i posiada znaczący wpływ na uzyskiwane wyniki.

2. MODELOWNY UKŁAD MECHATRONICZNY ORAZ PRZYJĘTE ZAŁOŻENIA

W pracy badano drgający giętnie układ mechatroniczny w postaci stalowej belki wspornikowej o długości l , szerokości b oraz grubości h_b , obciążonej na swobodnym końcu harmonicznie zmienną siłą działającą w kierunku prostopadłym do osi belki, opisaną zależnością (1). Do górnej powierzchni belki przytwierdzono przetwornik piezoelektryczny o szerokości równej szerokości belki i długości l_p , w odległości x_l od miejsca utwierdzenia belki. Do zacisków przetwornika dołączono układ elektryczny typu RC. Napięcie generowane

przez przetwornik piezoelektryczny w wyniku jego odkształcenia pomiędzy okładkami zewnętrznego kondensatora opisano zależnością (2):

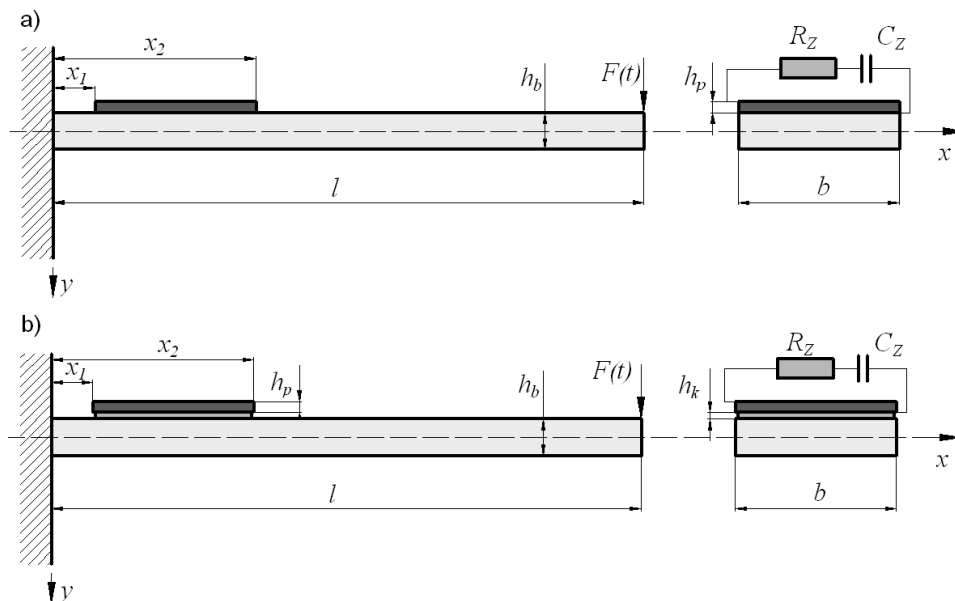
$$F(t) = F_0 \cos(\omega t), \quad (1)$$

$$U_c(t) = B \sin(\omega t). \quad (2)$$

Postać badanego układu mechatronicznego przedstawiono na rys. 1.

W poszczególnych modelach badanego układu zakładano idealne przytwierdzenie przetwornika do powierzchni belki, pomijając warstwę kleju i przyjmując, iż odkształcenie przetwornika równe jest odkształceniu powierzchni belki lub też uwzględniano wpływ warstwy kleju o grubości h_k i module sprężystości poprzecznej G , łączącej przetwornik z układem mechanicznym. W obu tych przypadkach rozważano ponadto modele, w których pominięto wpływ tłumienia wewnętrznych materiałów tworzących układ drgający lub też wprowadzono model Kelvina-Voigta materiału w celu ograniczenia amplitudy drgań układu.

We wszystkich stosowanych modelach matematycznych badanego układu mechatronicznego założono jednorodny, jednoosiowy stan odkształcenia przetwornika piezoelektrycznego, zaś w przypadku modeli, w których wzięto pod uwagę warstwę kleju, założono jej czyste ścinanie.



Rys.1. Badany układ mechatroniczny: a) idealne przytwierdzenie przetwornika;
b) przetwornik przytwierdzony za pomocą warstwy kleju

3. PRZYBLIŻONA METODA GALERKINA

W celu wyznaczenia podatności dynamicznej Y , opisanej zależnością (3), modelowanego układu mechatronicznego zastosowano przybliżoną metodę Galerkiną w której założono rozwiązanie różniczkowego równania drgań giętych belki w postaci sumy funkcji własnych zmiennej czasu i przemieszczenia (4) spełniającej warunki brzegowe (5), gdzie A oznacza amplitudę drgań belki :

$$y(x,t) = Y \cdot F_0 \cos(\omega t), \quad (3)$$

$$y(x,t) = A \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{2l} \cdot x \right] \cdot \cos(\omega t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,0) = A. \quad (5)$$

4. DYNAMICZNE RÓWNANIA RUCHU UKŁADU

Równanie drgań giętych belki wyznaczono na podstawie równowagi dynamicznej elementu belki wraz z przetwornikiem piezoelektrycznym o długości d_x . W przypadku modelu z założeniem idealnego przytwierdzenia przetwornika równanie to można zapisać w postaci (6), gdzie M_p oznacza moment gnący generowany przez przetwornik piezoelektryczny. Równanie drgań belki z uwzględnieniem ścinania warstwy kleju zapisano w postaci zależności (7), gdzie τ oznacza naprężenie styczne generowane przez przetwornik na powierzchni belki [1,2-6,8,10]:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = - \frac{E_b J_b}{\rho_b h_b b} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{\rho_b h_b b} \frac{\partial^2 M_p}{\partial x^2} \cdot [H(x-x_1) - H(x-x_2)] + \frac{F(t)}{\rho_b h_b b l}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = - \frac{E_b J_b}{\rho_b h_b b} \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{1}{\rho_b} \frac{\partial \tau}{\partial x} \cdot [H(x-x_1) - H(x-x_2)] + \frac{F(t)}{\rho_b h_b b l}. \quad (7)$$

W równaniach (6) oraz (7) wprowadzono funkcję Heaviside'a $H(x)$ w celu ograniczenia oddziaływania przetwornika piezoelektrycznego do odcinka od x_1 do x_2 . Stałe E_b , I_b , ρ_b oznaczają kolejno moduł Younga, moment bezwładności przekroju oraz gęstość belki.

Dynamiczne równanie ruchu przetwornika piezoelektrycznego z dołączonym obwodem elektrycznym założono w postaci równania liniowego obwodu RC z harmonicznym źródłem napięcia [1]:

$$R_z C_z \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) = \frac{Q}{C_p}, \quad (8)$$

gdzie Q oraz C_p oznaczają odpowiednio ładunek generowany na powierzchni przetwornika oraz jego pojemność elektryczną, zaś R_z i C_z rezystancję oraz pojemność zewnętrznego obwodu elektrycznego.

Model Kelvina-Voigta materiału belki i warstwy kleju wprowadzono, zastępując moduł Younga belki oraz moduł Kirchhoffa warstwy kleju odpowiednio wyrażeniami [2,3]:

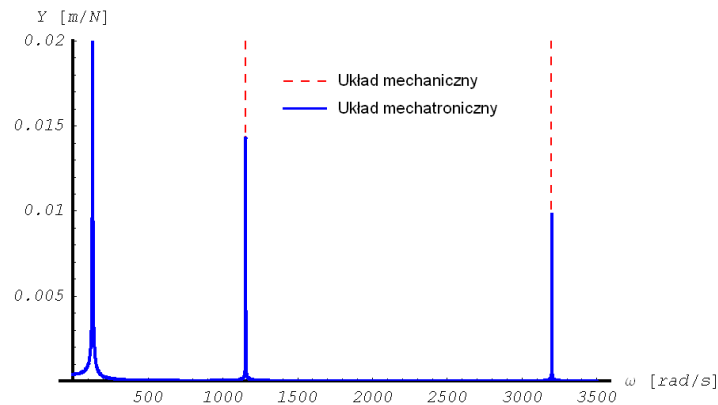
$$E_b^* = E_b \left(1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad G^* = G \left(1 + \mu_k \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (9)$$

gdzie μ oraz μ_k oznaczają czas relaksacji naprężeń belki oraz warstwy kleju.

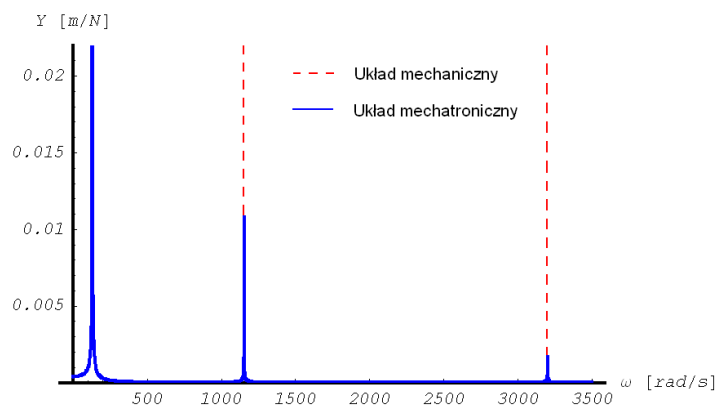
Uzyskany układ równań drgań belki oraz przetwornika, we wszystkich przypadkach, sprowadzono do postaci macierzowej oraz eliminowano zmienną czasu poprzez wykorzystanie zależności matematycznych, w tym twierdzenia Eulera. Podatność dynamiczną badanego układu mechatronicznego wyznaczano przy założeniu wartości zmiennej x równej długości belki ($x=l$) – swobodny koniec belki.

5. WYNIKI BADAŃ

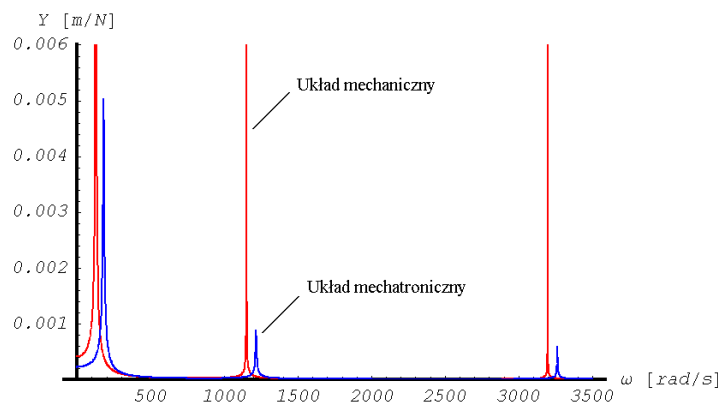
Wyniki przeprowadzonych badań modelowanego drgającego układu mechatronicznego przedstawiono w formie wykresów podatności dynamicznej wyznaczonej przy trzech pierwszych częstościach drgań własnych układu ($n=1,2,3$). Ponadto uzyskane przebiegi zestawiono z przebiegiem podatności dynamicznej układu mechanicznego w postaci belki wspornikowej o identycznych parametrach, obciążonej w taki sam sposób, jak w przypadku układu mechatronicznego, lecz pozbawionej przetwornika piezoelektrycznego. Uzyskane przebiegi podatności dynamicznej w przypadku poszczególnych modeli matematycznych układu przedstawiono na poniższych wykresach.



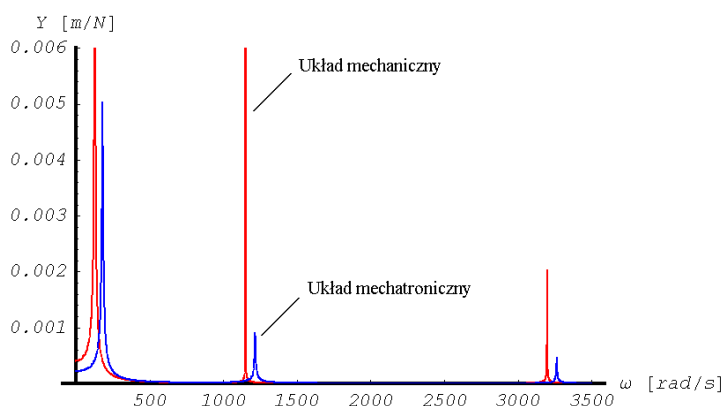
Rys.2. Podatność dynamiczna układu – model z idealnie przytwierdzonym przetwornikiem



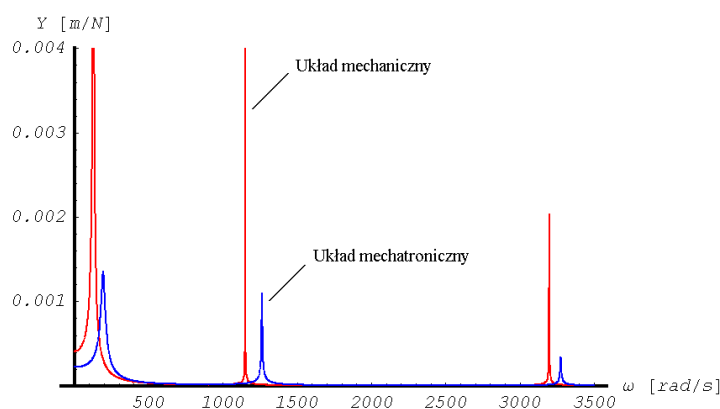
Rys.3. Podatność dynamiczna układu – model z idealnie przytwierdzonym przetwornikiem, model Kelvina – Voigta materiału belki



Rys.4. Podatność dynamiczna układu – model ze ścinaną warstwą kleju



Rys.5. Podatność dynamiczna układu – model ze ścinaną warstwą kleju, model Kelvina – Voigta materiału belki



Rys.6. Podatność dynamiczna układu – model ze ścinaną warstwą kleju, model Kelvina – Voigta materiału belki oraz kleju

Analizując uzyskane przebiegi podatności dynamicznej badanego układu mechatronicznego w przypadku poszczególnych, zastosowanych do jego opisu modeli matematycznych, stwierdzono, iż zakres stosowanych w danym modelu przybliżeń opisu układu rzeczywistego posiada znaczący wpływ na uzyskiwane wyniki.

W przypadku modeli matematycznych uwzględniających wpływ na charakterystykę dynamiczną układu warstwy kleju pośredniczącej pomiędzy układem mechanicznym a przetwornikiem stwierdzono spadek wartości podatności dynamicznej w strefach rezonansowych układu w stosunku do modeli zakładających idealne przytwierdzenie przetwornika. Ponadto zaobserwowano przesunięcie stref rezonansowych badanego układu w kierunku wyższych wartości częstości drgań, przy czym wartość tego przesunięcia zależy zarówno od parametrów przetwornika piezoelektrycznego i obwodu elektrycznego, jak i od wartości parametrów geometrycznych i materiałowych warstwy kleju [3,7]. Uwzględnienie w modelu matematycznym opisującym układ tłumienia wewnętrznego materiału, z którego jest on wykonany, powoduje dalszy spadek wartości podatności dynamicznej układu w strefach rezonansowych. Przy czym w przypadku modelu matematycznego uwzględniającego ścinanie warstwy kleju, spadek wartości podatności dynamicznej układu zaobserwowano jedynie w przypadku pierwszej częstości drgań układu, uwzględniając jednocześnie tłumienie wewnętrzne zarówno materiału belki, jak i kleju.

Stwierdzono więc, że słuszne jest dalsze uszczegółowienie stosowanych modeli matematycznych prowadzące do wierniejszego odwzorowania układu rzeczywistego, które stanowić będzie temat dalszych prac autorów.

LITERATURA

1. Kurnik W.: Damping of mechanical vibrations utilising shunted piezoelements. "Machine Dynamics Problems" 2004, Vol. 28, No 4, p. 15 – 26.
2. Osiński Z.: Tłumienie drgań. Warszawa :PWN, 1997.
3. Pietrzakowski M.: Wpływ właściwości połączenia elementów piezoelektrycznych na skuteczność aktywnego tłumienia drgań. W : Zbiór referatów IV Szkoły "Aktywne metody redukcji drgań i hałasu". Kraków – Krynica 2001, s. 233 – 240.
4. Pietrzakowski M.: Zakłócenia aktywnego tłumienia drgań belki przez błędy montażu i delaminację piezoaktuatora. W : Zbiór referatów V Warsztatów Naukowych PTSK „Symulacja w badaniach i rozwoju” (red. R. Bogacz, A. Tylikowski), 1999, s. 232-242.
5. Pietrzakowski M.: Influence of glue layers on vibration damping of composite plates. W : Proceedings of XVIIIth Symposium Vibrations in Physical Systems. Poznań-Błajejewko, 1998, s. 225-226.
6. Pietrzakowski M.: Active damping of beams by piezoelectric system: effects of bonding layer properties. "International Journal of Solids and Structures" 2001, 38, p. 7885-7897.
7. Preumont A.: Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems. Solid mechanics and its applications. Springer, 2006.
8. Przybyłowicz, P.M.: Torsional vibration control by active piezoelectric system, "Journal of Theoretical and Applied Mechanics" 1995, 33(4), p. 809-823.
9. Reza Moheimani S.O., Fleming A.J.: Piezoelectric transducers for vibration control and damping. Springer, 2006.
10. Tylikowski, A.: Stabilization of beam parametric vibrations. "Journal of the Theoretical and Applied Mechanics" 1993, 31(3), p. 657-670.

**THE SERIES OF DISCRETE - CONTINUOUS
MATHEMATICAL MODELS
OF THE MECHATRONIC SYSTEM**

Summary. This paper presents report of works apply to research of dynamic characteristics of vibrating one - dimension mechatronic systems modelled by the series of discrete - continuous mathematical models. Applied mathematical models differ in degree of accuracy of the true mechatronic system representation. The main aim of this research is to define influence of the applied mathematical model's simplification on accuracy of obtained results and to indicate if more precise mathematical model of the considered mechatronic system, which requires more advanced mathematical calculations, produces desired results – more precise representation of the true mechatronic system.