

# BADANIE ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ W WIELOWARSTWOWEJ RURZE KOMPOZYTOWEJ

Piotr Krysiak<sup>1a</sup>, Aleksander Błachut<sup>2b</sup>

<sup>1</sup>Wojskowy Instytut Techniki Inżynieryjnej, Wrocław

<sup>2</sup>Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej, Politechnika Wrocławska

<sup>a</sup>krysiak@witi.wroc.pl, <sup>b</sup>aleksander.blachut@pwr.edu.pl

## Streszczenie

Praca dotyczy analizy zagadnień związanych z modelowaniem struktur kompozytowych o geometrii rurowej. Głównym celem pracy było zaprojektowanie struktury wielowarstwowej nawijanej rury kompozytowej w taki sposób, aby po obciążeniu rozkład naprężeń obwodowych był możliwie jednorodny, co dawałoby szansę na redukcję masy kompozytu przy zachowaniu jego odpowiedniej wytrzymałości. Opracowane wyniki modelowania mogą służyć do opracowania technologii wytwarzania kompozytowych rur do transportu sprężonych gazów pod wysokim ciśnieniem. W ramach pracy wykonano model obliczeniowy dedykowany dla jedno- oraz wielowarstwowych struktur kompozytowych. Równania opisujące rozkłady naprężeń wyprowadzono na podstawie zagadnienia Lamego, określające rozkład naprężeń w rurze grubościennnej w warunkach płaskiego stanu naprężenia.

**Słowa kluczowe:** rura kompozytowa, kompozyty włókniste, analiza naprężeń

## THE INVESTIGATION OF THE STRESS DISTRIBUTION IN A MULTILAYER COMPOSITE PIPE

### Summary

The paper concerns analysis of the issues concerning the modeling of tubular composite structures. The main issue of the work is to design a multilayer structure of filament-wound composite pipes in such a manner, that following loading, the hoop stress distribution would be as uniform as possible. That would allow for the reduction of the mass of the composite, while maintaining the proper mechanical strength. The application goal is the use of the modeling to develop a new manufacturing technology of composite pipes for the transportation of compressed gases under high pressure. The project included the development of a calculation model dedicated to both the mono- and multilayer composite structures. The equations describing the stress distribution were derived based on the Lamé's problem, which specifies the stress distribution in a thick-walled pipe under the conditions of plane stress state.

**Keywords:** composite pipe, fiber composites, stress analysis

### 1. WSTĘP

Wzrost zastosowań wzmocnionych kompozytów polimerowych do wykonywania lekkich konstrukcji umożliwiających przenoszenie dużych obciążeń stał się impulsem do opracowywania coraz to nowszych rodzajów włókien wzmocniających o korzystnych parametrach wytrzymałościowych. Ponadto stosuje się odpowiednie zabiegi technologiczne podczas wytwarzania konstrukcji, które

umożliwiają w maksymalnym stopniu wykorzystanie znakomych właściwości materiałów konstrukcyjnych.

Tradycyjne materiały konstrukcyjne stanowią na ogół materiały jednorodne i w większości przypadków izotropowe. Kompozyty natomiast są materiałami niejednorodnymi i w zdecydowanej większości przypadków

również anizotropowymi (lub ortotropowymi, z programowanym ułożeniem wzmocnienia). Oznacza to, że właściwości tych materiałów, w tym również mechaniczne, są funkcją położenia badanego elementu objętościowego oraz kierunku działającego na niego obciążenia. Dlatego wykorzystanie kompozytów w zastosowaniach inżynierskich wymaga stosowania w obliczeniach wytrzymałościowych innych zależności niż to ma miejsce w odniesieniu do tradycyjnych, jednorodnych materiałów konstrukcyjnych i to zarówno w obszarze sprężystości, jak również w obszarach granicznych, zdeterminowanych wytrzymałością materiału.

Szczególnym obiektem badań spełniającym powyższe kryteria jest rura wykonana z kompozytu wzmocnionego włóknem ciągłym na osnowie polimerowej. Z punktu widzenia technologii wykonania jest to obiekt osiowosymetryczny, w którym można w prosty sposób sterować parametrami nawoju włókien (kątem nawoju, naciąg wiązki). Z punktu widzenia modelowania, jest to obiekt osiowosymetryczny o strukturze anizotropowej (lub ortotropowej), jedno- lub wielowarstwowy z jednakową lub różną strukturą elementarnych warstw oraz z możliwymi dodatkowymi warunkami brzegowymi pomiędzy warstwami. Wynika z tego fakt, że do opisu analitycznego nawet nieskomplikowanych geometrycznie struktur kompozytowych, należy stosować złożone zagadnienia wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych.

Pierwsze prace nad zagadnieniem modelowania wielowarstwowej rury kompozytowej podjęto kilkadziesiąt lat temu [7-10].

W pracy [7] rozpatrzono problem równowagi sprężystego jednorodnego ciała anizotropowego o przekroju cylindrycznym, obciążonego siłami zewnętrznymi, które powodują stan naprężeń tylko wzdłuż dwóch współrzędnych (naprężenie nie zmienia się po długości).

W opracowaniu [8] wyprowadzono podstawowe równania dla ciała sprężystego posiadającego cylindryczną anizotropię w płaskim stanie naprężenia oraz płaskim stanie odkształcenia, natomiast w pracy [10] wyznaczono równania dotyczące rozkładu naprężeń promieniowych, obwodowych i wzdłużnych dla rury wykonanej z materiału anizotropowego (drewna dębowego).

W pracy [9] wyznaczono równania opisujące stan wyężenia różnych konstrukcji, od płyt i powłok po pręty zakrzywione i rury z uwzględnieniem anizotropii oraz różnych przypadków obciążenia.

Przytoczone prace [7-10] dawały głównie podstawy teoretyczne w odniesieniu do różnych materiałów wówczas wykorzystywanych, ponieważ materiały kompozytowe nie były znane i stosowane na taką skalę jak dzisiaj. W ostatnich latach, w miarę rozwoju metod numerycznych i możliwości obliczeniowych komputerów oraz postępu w zakresie rozwoju materiałów (włókna

wzmacniające, żywice) i technologii wytwarzania, podjęto próby modelowania i identyfikacji stanu wyężenia bardziej złożonych struktur kompozytowych. Takich zagadnień dotyczą na przykład prace [1, 3-5, 11,12].

Istnieje również pełna gama prac dotyczących wpływu kąta ułożenia włókna podczas procesu nawijania na wytrzymałość konstrukcji. W niniejszej pracy skupiono się głównie na nawoju obwodowym z kątem nawijania 90°. Mimo to na uwagę zasługuje na przykład artykuł [13], w którym opracowano procedurę analityczną do oceny rozkładu odkształceń i naprężeń w konstrukcji wzmocnionej włóknami w warunkach obciążenia osiowego.

## 2. ANALIZA NAPRĘŻEŃ DO RURY JEDNO- I WIELOWARSTWOWEJ O ZRÓŻNICOWANYCH WŁAŚCIWOŚCIACH MATERIAŁU W WARSTWIE

Badana rura jest obiektem osiowosymetrycznym, dlatego podczas rozważań wygodnie jest przyjąć układ współrzędnych biegunowy. W takim układzie dla współrzędnych  $(r, \varphi)$  istnieje możliwość wyznaczenia wartości naprężeń obwodowych  $\sigma_\varphi$  oraz wartości naprężeń promieniowych (normalnych)  $\sigma_r$ . Rozważania dotyczą materiału kompozytowego, którego właściwości różnią się w zależności od kierunku obciążenia. Dlatego do opisu modelowanych struktur wprowadzono współczynnik anizotropii, który wiąże kierunkowe moduły sztywności materiału.

W ramach pracy wyprowadzono równania opisujące:

- rozkłady naprężeń dla rury jednowarstwowej wykonanej z materiału anizotropowego,
- rozkłady naprężeń dla rury wielowarstwowej wykonanej z materiałów o różnych właściwościach,
- rozkłady naprężeń dla rury wielowarstwowej wykonanej z materiałów o różnych właściwościach obciążonej ciśnieniem wewnętrznym.

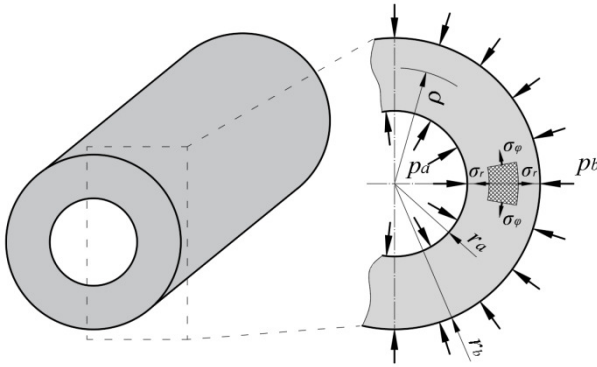
### 2.1 ANALIZA NAPRĘŻEŃ DO RURY JEDNOWARSTWOWEJ WYKONANEJ Z MATERIAŁU ANIZOTROPOWEGO

Założono, że materiał rury spełnia warunki ortogonalnej anizotropii, gdzie każdy element posiada trzy osie symetrii, z których jedna pokrywa się z kierunkiem obwodowym rury, druga z kierunkiem radialnym, trzecia jest prostopadła do pozostałych. Takim szczególnym warunkom odpowiada laminat powstały w procesie nawijania obwodowego.

Zadanie będzie rozpatrywane analogicznie do znanego zagadnienia Lamego, mówiącego o rozkładzie naprężeń w rurze grubościenniej w warunkach płaskiego stanu naprężenia. W takim układzie składowe naprężenia w przekroju poprzecznym rury są równe zero, co w praktyce oznacza, że rura może odkształcać się osiowo.

Jednoznaczne wyznaczenie składowych odkształceń, naprężeń i przemieszczenia promieniowego w warstwie możliwe jest w dowolnej odległości  $\rho$  od osi rury, gdy znane są następujące wielkości (rys. 1):

- stałe materiałowe:  $E_r, E_\varphi, \nu_{r\varphi}$ ,
- naciski wywierane na powierzchnię wewnętrzną ( $p_a$ ) oraz zewnętrzną ( $p_b$ ),
- promienie powierzchni wewnętrznej ( $r_a$ ) i zewnętrznej ( $r_b$ ).



Rys. 1. Model rury jednowarstwowej przyjęty do obliczeń

Związek między naprężeniami ( $\sigma$ ) a odkształceniami ( $\varepsilon$ ) w płaskim stanie naprężenia opisują poniższe równania konstytutywne (1-3):

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\nu_{r\varphi}\sigma_\varphi}{E_\varphi} \quad (1)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{E_\varphi} - \frac{\nu_{r\varphi}\sigma_r}{E_r} \quad (2)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\tau_{r\varphi}}{G_{r\varphi}} \quad (3)$$

W opisywanych zależnościach indeks  $\varphi$  odpowiada kierunkowi obwodowemu, natomiast indeks  $r$  odpowiada kierunkowi radialnemu. Zagadnienie jest rozpatrywane przy założeniu symetrii kołowej, co oznacza, że odkształcenie postaciowe  $\gamma_{r\varphi} = 0$ , więc  $\tau_{r\varphi} = 0$ .

W odniesieniu do współczynnika Poissona  $\nu$ , pierwszy indeks odpowiada kierunkowi obciążenia, natomiast drugi indeks kierunkowi odkształcenia.

Indeksy przy module sprężystości podłużnej  $E$  oznaczają kierunek odkształcenia.

Dla materiału anizotropowego prawdziwa jest zależność (4) wynikająca z symetrii macierzy sztywności:

$$\frac{\nu_{r\varphi}}{E_r} = \frac{\nu_{\varphi r}}{E_\varphi} \quad (4)$$

Równanie różniczkowe równowagi dla zagadnienia kołowo symetrycznego przyjmuje postać (5):

$$\sigma_r - \sigma_\varphi + \rho \frac{d\sigma_r}{d\rho} = 0 \quad (5)$$

Dla zestawienia równań zgodności odkształceń zastosowano znane zależności między składowymi odkształceniami a promieniowym przemieszczeniem  $u$  w warunkach symetrii:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{d\rho} \quad (6)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{\rho} \quad (7)$$

Podstawiając do równania (6) przemieszczenie promieniowe  $u$ , wyznaczone z równania (7), otrzymano:

$$\varepsilon_r = \frac{d}{d\rho}(\varepsilon_\varphi \rho) = \varepsilon_\varphi + \rho \frac{d\varepsilon_\varphi}{d\rho} \quad (8)$$

czyli po przekształceniu:

$$\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi - \rho \frac{d\varepsilon_\varphi}{d\rho} = 0 \quad (9)$$

Układ równań (5) i (9) wiąże odkształcenia oraz naprężenia w rurze, gdzie naprężenia obwodowe i promieniowe wyrażone są funkcjami (10, 11):

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{\rho} \quad (10)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{d\varphi}{d\rho} \quad (11)$$

oraz spełniają równania równowagi (5).

Na podstawie zależności (1, 2, 3) otrzymano:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} \frac{\varphi}{\rho} - \frac{\nu_{r\varphi}}{E_\varphi} \frac{d\varphi}{d\rho} \quad (12)$$

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{\nu_{r\varphi}}{E_r} \frac{\varphi}{\rho} + \frac{1}{E_\varphi} \frac{d\varphi}{d\rho} \quad (13)$$

Podstawiając otrzymane zależności do równania (9), zauważono, że funkcja  $\varphi(\rho)$  powinna spełniać równanie różniczkowe (14):

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} - \frac{E_\varphi}{E_r} \frac{\varphi}{\rho^2} = 0 \quad (14)$$

Jest to równanie Eulera, które rozwiązano poprzez podstawienie:

$$\rho = e^u \quad (15)$$

A zatem:

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{d\varphi}{d\rho} \frac{d\rho}{du} = e^u \frac{d\varphi}{d\rho} \quad (16)$$

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = e^{-u} \frac{d\varphi}{du} \quad (17)$$

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} \frac{d\rho}{du} + e^u \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d^2\varphi}{d\rho^2} e^{2u} + \frac{d\varphi}{du} \quad (18)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} = e^{-2u} \left( \frac{d^2\varphi}{du^2} - \frac{d\varphi}{du} \right) \quad (19)$$

Podstawiając równania (17) i (19) do zależności (14), otrzymano równanie (20):

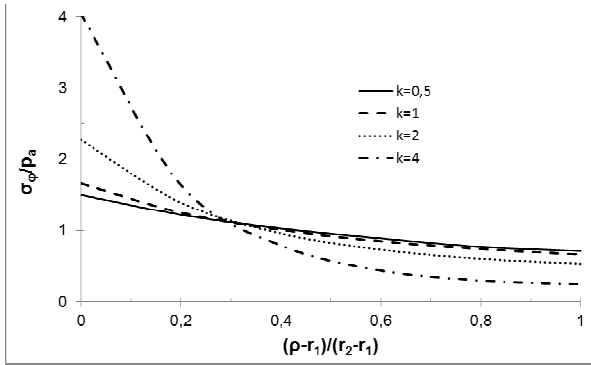
$$\frac{d^2\varphi}{du^2} - k^2\varphi = 0 \quad (20)$$

gdzie:

$$k = \sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}} \quad (21)$$

jest współczynnikiem anizotropii.

Na rys. 2 przedstawiono przykładowe teoretyczne rozkłady naprężeń obwodowych odniesione do ciśnienia wewnątrz rury w zależności od jej grubości dla różnych wartości współczynnika  $k$ .



Rys. 2. Wpływ wartości współczynnika anizotropii  $k$  na rozkład naprężeń obwodowych

W tabeli 1 przedstawiono dla porównania rzeczywiste wartości współczynnika anizotropii dla wybranych materiałów konstrukcyjnych stosowanych w praktyce inżynierskiej.

Tab. 1. Właściwości materiałów konstrukcyjnych

l.p	Materiał	$E_\varphi$ [GPa]	$E_r$ [GPa]	$k$ [-]
1. [10]	Drewno dębowe	9,5	20	0,7
2. [2]	Stal	206	206	1,0
3. [6]	Kompozyt epoksydowo - szklany	54,6	15,3	1,9
4. [6]	Kompozyt epoksydowo - węglowy	161,5	14,3	3,4

Równanie (20) jest równaniem liniowym o stałych współczynnikach, dla którego równanie charakterystyczne jest postaci:

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \quad (22)$$

Rozwiązując powyższe równanie (22), otrzymano:

$$\varphi(u) = C_1 e^{ku} + C_2 e^{-ku} \quad (23)$$

$$u = \ln \rho \quad (24)$$

$$\varphi(\ln \rho) = C_1 e^{k \ln \rho} + C_2 e^{-k \ln \rho} \quad (25)$$

$$\varphi(\rho) = C_1 \rho^k + C_2 \rho^{-k} \quad (26)$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  – dowolne stałe całkowania, określone na podstawie działających warunków wewnętrznych i zewnętrznych na rurę.

Podstawiając funkcję  $\varphi(\rho)$  do wyrażenia (10, 11), otrzymano składowe naprężenia:

$$\sigma_r = C_1 \rho^{k-1} + C_2 \rho^{-(k+1)} \quad (27)$$

$$\sigma_\varphi = C_1 k \rho^{k-1} - C_2 k \rho^{-(k+1)} \quad (28)$$

Stałe całkowania wylicza się z warunków brzegowych:

$$\sigma_r(\rho = r_a) = -p_a \quad (29)$$

$$\sigma_r(\rho = r_b) = -p_b$$

Po podstawieniu określonych warunków brzegowych otrzymuje się następujące stałe całkowania:

$$C_1 = -\frac{p_a r_a^{1+k} - p_b r_b^{1+k}}{r_a^{2k} - r_b^{2k}} \quad (30)$$

$$C_2 = -\frac{r_a^k r_b^k (p_b r_a^k r_b - p_a r_a r_b^k)}{r_a^{2k} - r_b^{2k}} \quad (31)$$

A zatem wyrażenia na składowe naprężenia obwodowego i promieniowego w zależności od promienia  $\rho$ , gdzie:  $\rho(r_a, r_b)$  przyjmą postać:

$$\sigma_r(\rho) = \frac{\rho^{-k-1} (p_b r_b^{k+1} (\rho^{2k} - r_a^{2k}) - p_a r_a^{k+1} (\rho^{2k} - r_b^{2k}))}{r_a^{2k} - r_b^{2k}} \quad (32)$$

$$\sigma_\varphi(\rho) = \frac{k \rho^{-k-1} (p_b r_b^{k+1} (r_a^{2k} + \rho^{2k}) - p_a r_a^{k+1} (r_b^{2k} + \rho^{2k}))}{r_a^{2k} - r_b^{2k}} \quad (33)$$

Dla płaskiego stanu naprężenia  $\sigma_z = 0$ .

Odształcenia promieniowe oraz obwodowe można wyznaczyć na podstawie równań konstytutywnych (1, 2, 3):

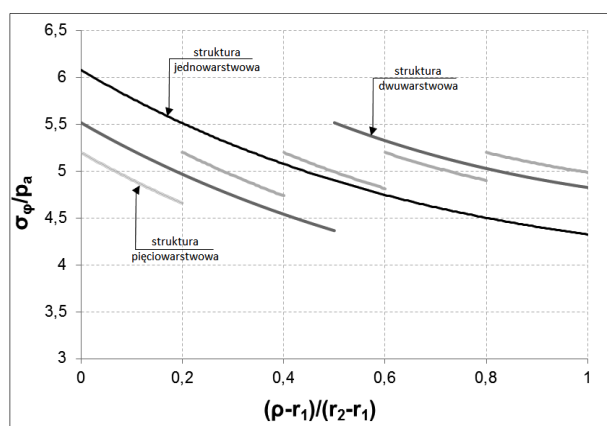
$$\begin{aligned} \varepsilon_r(\rho) &= \frac{1}{E_r} \sigma_r(\rho) - \frac{\nu_\varphi}{E_\varphi} \sigma_\varphi(\rho) = \\ &= \frac{\rho^{-k-1} (p_b r_b^{k+1} (\rho^{2k} - r_a^{2k}) - p_a r_a^{k+1} (\rho^{2k} - r_b^{2k}))}{E_r (r_a^{2k} - r_b^{2k})} - \\ &\quad - \frac{k \rho^{-k-1} \nu_\varphi (p_b r_b^{k+1} (r_a^{2k} + \rho^{2k}) - p_a r_a^{k+1} (r_b^{2k} + \rho^{2k}))}{E_\varphi (r_a^{2k} - r_b^{2k})} \end{aligned} \quad (34)$$



Tab. 2. Właściwości materiałów dla poszczególnych warstw

Liczba warstw	$E_\varphi$ [GPa]	$E_r$ [GPa]	$\nu$ [-]	$k$ [-]
1	9,0	9,0	0,33	1,0
1	9,0	9,0	0,33	1,0
2	11,3	9,0		1,12
1	9,0	9,0		1,0
2	10,0	9,0		1,05
3	10,9	9,0	0,33	1,1
4	11,8	9,0		1,14
5	12,5	9,0		1,18

Na podstawie powyższych założeń wykonano obliczenia, których wyniki przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Rozkład wartości naprężeń obwodowych dla ścianki rury oraz poszczególnych warstw

#### 4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

W ramach pracy wyznaczono równania opisujące stan wyteżenia ścianki elementu walcowego składającego się z jednej oraz wielu warstw z uwzględnieniem materiałów o właściwościach anizotropowych. Na podstawie przedstawionych przykładowych wyników obliczeń należy stwierdzić, że poprzez stosowanie materiałów o różnych właściwościach w strukturze oraz odpowiedni dobór parametrów geometrycznych, możliwa jest redukcja maksymalnych naprężeń obwodowych występujących na wewnętrznej powierzchni ścianki i rozłożenie ich tak, aby cała struktura była wyteżona możliwie równomiernie. Ponadto wyniki symulacji mogą służyć jako podstawa do wytwarzania materiałów kompozytowych o programowanych właściwościach sprężystych.

#### Literatura

- Bajkowski M., Grygoruk R., Kaniewski J., Radomski M.: Stan naprężenia w cylindrze wzmocnionym nawojem taśmy z uwzględnieniem jej zginania. „Modelowanie Inżynierskie” 2014, t. 22, nr 53, s. 7-13.
- Brzoska Z.: Wytrzymałość materiałów. Warszawa: PWN, 1972.
- Hamed A. F., Sapuan S. M., Hamdan M. M., Sahari B. B.: Theoretical stress and strain distribution across thick-walled filament wound composite. „Polimery” 2009, Vol. 7–8, p. 559–563.
- Imanijad M., Subhash G.: Proportional loading of thick-walled cylinders. „International Journal of Pressure Vessels and Piping” 2005, Vol. 82, p. 129–135.
- Krysiak P., Błachut A., Gąsior P., Kaleta J.: Influence of fiber type and the layer thickness on the stress distribution in composite pipe. „Interdisciplinary Journal of Engineering Science” 2014, Vol. 2, p. 17–20.
- Krysiak P., Błachut A., Babiarczuk B.: Analiza struktury nawijanej rury kompozytowej na bazie włókien ciągłych. „Interdisciplinary Journal of Engineering Sciences” 2016, Vol. IV, No. 1.
- Лехницкий С. Г.: Некоторые случаи упругого равновесия однородного цилиндра с произвольной анизотропией. „Академия Наук СССР. Прикладная Математика и Механика” 1938, т2, н8, ст. 345–367.
- Лехницкий С. Г.: Плоская задача теории упругости для тела, обладающего цилиндрической анизотропией, 1938, ст. 135–153.
- Lekhnitskii S. G.: Anisotropic plates. Translated by Tsai S. W. and Cheron T. Gordon and Breach Science Publishers, New York 1968, p. 106–114.
- Митинский А. Н.: Напряжения в толстостенной анизотропной трубе под действием наружного и внутреннего давлений, „Сборник Ленинградского Ордена Ленина Института Инженеров Железнодорожного Транспорта”, 1947.

11. Shariyat M., Nikkhah M., Kazemi R.: Exact and numerical elastodynamic solutions for thick-walled functionally graded cylinders subjected to pressure shocks. „International Journal of Pressure Vessels and Piping” 2011, Vol. 88, p. 75–87.
12. Vedeld K., Sollund H.: Stresses in heated pressurized multi-layer cylinders in generalized plane strain conditions. „International Journal of Pressure Vessels Piping” 2014, Vol. 120-121, p. 27–35.
13. Wild P. M, Vickers G. W.: Analysis of filament-wound cylindrical shells under combined centrifugal, pressure and axial loading. „Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing” 1997, Vol. 28, p. 47–55.



Artykuł dostępny na podstawie licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0 Polska.  
<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/pl>