

MODEL PRZEPŁYWU NIEUSTALONEGO Z KAWITACJĄ W PRZEWODACH CIŚNIENIOWYCH

KAMIL URBANOWICZ

*Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Szczecińska
e-mail: kurbanowicz@ps.pl*

Streszczenie. W pracy przedstawiony został model kawitacji pęcherzykowej, w którym uwzględniono zmienną prędkość propagacji fali ciśnienia. Model wyjściowy jest układem równań różniczkowych cząstkowych, składającym się z równania ruchu i ciągłości. Równania te wyprowadzone zostały dla jednorodnej mieszaniny cieczy i jej pary. W celu rozwiązania tego układu wykorzystano metodę charakterystyk. Wprowadzenie do tego rozwiązania prędkości propagacji fali ciśnienia, będącej funkcją stężenia fazy ciekłej, zamiast stosowania jej wartości stałej, spowodowało znaczną komplikację rozwiązania i konieczność wykorzystywania interpolacji. Otrzymane rozwiązanie jest bowiem układem dziesięciu równań nieliniowych, z których szukane parametry przepływu można wyznaczyć jedynie metodami numerycznymi.

1. WSTĘP

Rozwiązywanie zamodelowanych równań różniczkowych cząstkowych opisujących przepływ nieustalony z kawitacją w przewodach ciśnieniowych jest zagadnieniem skomplikowanym. Wśród wielu metod mających na celu poszukiwanie rozwiązania tych równań aktualnie najbardziej popularna jest metoda charakterystyk (method of characteristics MOC) [1,2,9,11,12,13]. Stąd też zaprezentowane w tej pracy rozwiązanie będzie właśnie wynikiem zastosowania tej metody. Wśród innych metod, służących do rozwiązywania tego typu przepływu, można wymienić m. in.: metodę różnic skończonych [6,7,8], metodę elementów skończonych FEM [3,10] oraz ostatnio zaprezentowaną metodę objętości skończonych [4].

W pracy niniejszej znany model kawitacji pęcherzykowej (bubble cavitation model BCM) [6,9] został zmodyfikowany poprzez uwzględnienie zmiennej prędkości propagacji fali ciśnienia. Następnie pokazano szczegółowy tok postępowania zmierzający do otrzymania rozwiązania układu równań różniczkowych cząstkowych (równania ciągłości i ruchu) opisującego przepływ nieustalony.

2. ROZWIĄZANIE

Model matematyczny opisujący przepływ nieustalony z kawitacją jest układem równań różniczkowych cząstkowych [9,11]:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + (\rho_1 - \rho_v) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \rho_m \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{v}{\alpha} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\rho_m \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\frac{v}{\alpha} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{R} \cdot \tau_w + \rho_m \cdot g \cdot \sin \gamma = 0 \quad (2)$$

gdzie:

$$\rho_m = \alpha \cdot \rho_1 + (1 - \alpha) \cdot \rho_v \quad (3)$$

Równanie (1) jest równaniem ciągłości wyprowadzonym dla jednorodnej mieszaniny, natomiast równanie (2) jest równaniem ruchu.

Przekształcając równanie (3) na gęstość mieszaniny, można otrzymać wyrażenie na współczynnik stężenia fazy ciekłej:

$$\alpha = \frac{\rho_m - \rho_v}{\rho_1 - \rho_v} \quad (4)$$

Wykorzystując metodę charakterystyk, sprowadza się układ równań różniczkowych cząstkowych (1) (2) do dwóch układów równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\alpha} \right) \pm \frac{1}{\rho_m \cdot c} \cdot \frac{dp}{dt} \pm \frac{c}{\rho_m} \cdot (\rho_1 - \rho_v) \frac{\partial \alpha}{\partial t} + g \cdot \sin \gamma + \frac{2 \cdot \tau_w}{r \cdot \rho_m} = 0 \quad (5)$$

gdzie:

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \quad (6)$$

Następnie można zapisać, że:

$$\frac{1}{\rho_m \cdot c} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c \cdot (\alpha \cdot \rho_1 + (1 - \alpha) \cdot \rho_v)} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (7)$$

Prędkość propagacji fali ciśnienia „c” można wyznaczyć ze wzoru [12]:

$$c = \frac{1}{\sqrt{(\alpha \cdot \rho_1 + (1 - \alpha) \cdot \rho_v) \cdot \left[\frac{1 - \alpha}{\rho_v \cdot a_v^2} + \frac{\alpha}{\rho_1 \cdot a_1^2} \right]}} \quad (8)$$

Grupując następujące wyrażenia stałe:

$$C_1 = \frac{1}{\rho_v \cdot a_v^2}; C_2 = \rho_1 - \rho_v; C_3 = \rho_v; C_4 = \left(\frac{1}{\rho_1 \cdot a_1^2} - \frac{1}{\rho_v \cdot a_v^2} \right) \quad (9)$$

oraz przekształcając równanie (7), otrzyma się:

$$\frac{1}{\rho_m \cdot c} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha^2 C_2 C_4 + \alpha(C_1 C_2 + C_3 C_4)} + C_1 C_3}{\alpha C_2 + C_3} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (10)$$

Stosując kolejne podstawienia

$$C = C_2 C_4; D = C_1 C_2 + C_3 C_4; E = C_1 C_3; F = C_2; G = C_3 \quad (11)$$

otrzyma się ostateczną postać tego wyrażenia:

$$\frac{1}{\rho_m \cdot c} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}}{\alpha F + G} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (12)$$

Samą postać prędkości propagacji fali ciśnienia z tak pogrupowanymi stałymi zapisać można następująco:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 C_2 C_4 + \alpha(C_1 C_2 + C_3 C_4) + C_1 C_3}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \quad (13)$$

Natomiast gęstość mieszaniny zapisać można jako:

$$\rho_m = \alpha C_2 + C_3 = \alpha F + G \quad (14)$$

Kolejnym wyrażeniem, które zostanie przekształcone jest wyrażenie:

$$\frac{c}{\rho_m} \cdot (\rho_1 - \rho_v) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{C_2}{(\alpha C_2 + C_3) \cdot \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (15)$$

Stąd, wykorzystując podstawienia (11) :

$$\frac{c}{\rho_m} \cdot (\rho_1 - \rho_v) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{F}{(\alpha F + G) \cdot \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (16)$$

dzieląc przez F, otrzyma się ostateczną postać:

$$\frac{c}{\rho_m} \cdot (\rho_1 - \rho_v) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{1}{(\alpha + H) \cdot \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (17)$$

gdzie:

$$H = G/F \quad (18)$$

Układ równań (5) (6) może zatem być przedstawiony jako:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\alpha} \right) \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}}{\alpha F + G} \cdot \frac{dp}{dt} \pm \frac{1}{(\alpha + H) \cdot \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} + g \cdot \sin \gamma + \frac{2 \cdot \tau_w}{r \cdot (\alpha F + G)} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \quad (20)$$

Mnożąc równanie (19) przez dt oraz przekształcając równanie (20), otrzyma się:

$$d \left(\frac{v}{\alpha} \right) \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}}{\alpha F + G} \cdot dp \pm \frac{1}{(\alpha + H) \cdot \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \cdot d\alpha + g \cdot \sin \gamma \cdot dt + \frac{2 \cdot \tau_w \cdot dt}{r \cdot (\alpha F + G)} = 0 \quad (21)$$

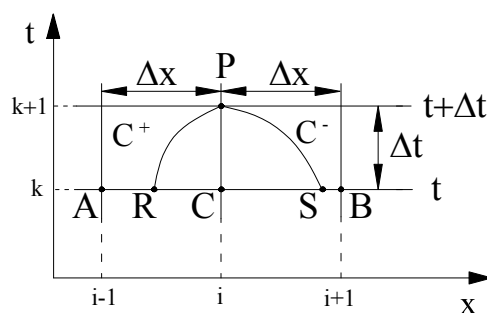
$$dt = \pm \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E} \cdot d\alpha \cdot \frac{dx}{d\alpha} \quad (22)$$

Następnym krokiem jest scałkowanie tego układu równań:

$$\int_{\frac{v_R}{\alpha_R}}^{\frac{v_P}{\alpha_P}} d \left(\frac{v}{\alpha} \right) + \int_{p_R}^{p_P} \frac{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}}{\alpha F + G} \cdot dp + \int_{\alpha_R}^{\alpha_P} \frac{1}{(\alpha + H) \cdot \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \cdot d\alpha + g \cdot \sin \gamma \cdot \int_{t_R}^{t_P} dt + \int_{t_R}^{t_P} \frac{2 \cdot \tau_w \cdot dt}{r \cdot (\alpha F + G)} = 0 \quad (23)$$

$$\int_{t_R}^{t_P} dt = \int_{\alpha_R}^{\alpha_P} \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E} \cdot d\alpha \cdot \frac{dx}{d\alpha} \quad (24)$$

Indeksy związane są z punktami na siatce charakterystyk, tak jak przedstawia to poniższy rysunek (rys. 1).



Rys. 1. Siatka charakterystyk

Rozwiązania tych całek są następujące:

$$\int_{\frac{v_R}{\alpha_R}}^{\frac{v_P}{\alpha_P}} d \left(\frac{v}{\alpha} \right) = \frac{v_P}{\alpha_P} - \frac{v_R}{\alpha_R} \quad (25)$$

Współczynnik stężenia fazy ciekłej nie jest zależny od ciśnienia (przyjmuje wartości z przedziału (0, 1) przy stałej wartości ciśnienia $p=p_v$), można więc zapisać, że:

$$\int_{p_R}^{p_P} \frac{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}}{\alpha F + G} \cdot dp = \frac{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}}{\alpha F + G} \int_{p_R}^{p_P} dp = \frac{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}}{\alpha F + G} \cdot (p_P - p_R) \quad (26)$$

Ponieważ zarówno gęstość mieszaniny jak i prędkość propagacji fali ciśnienia nie są funkcjami ciśnienia, można zapisać to tak jak zaproponował Shu [9]:

$$\frac{1}{\rho_m \cdot c} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}}{\alpha F + G} \cdot \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho_1 \cdot c_o} \cdot \frac{d}{dt}(p - p_v) = \frac{1}{\rho_1 \cdot c_o} [(p_P - p_v) - (p_R - p_v)] \quad (27)$$

$$\int_{\alpha_R}^{\alpha_P} \frac{1}{(\alpha + H) \cdot \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \cdot d\alpha = -\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_P + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_R + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} \quad (28)$$

$$g \cdot \sin \gamma \cdot \int_{t_R}^{t_P} dt = g \cdot \sin \gamma \cdot (t_P - t_R) = g \cdot \sin \gamma \cdot \Delta t \quad (29)$$

Równanie charakterystyk po przekształceniu można zapisać:

$$dt = \pm \sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E} \cdot d\alpha \cdot \frac{dx}{d\alpha} \rightarrow dx = c \cdot d\alpha \cdot \frac{dt}{d\alpha} \rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \cdot d\alpha \cdot \frac{dt}{d\alpha} \quad (30)$$

czyli otrzymamy następującą całkę dla charakterystyki C+:

$$x_P - x_R = \frac{t_P - t_R}{\alpha_P - \alpha_R} \cdot \int_{\alpha_R}^{\alpha_P} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 C + \alpha D + E}} \cdot d\alpha \quad (31)$$

gdzie po rozwiązaniu całki otrzymamy:

$$x_P - x_R = \frac{t_P - t_R}{\alpha_P - \alpha_R} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_P + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_R + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (32)$$

gdzie Δ jest wartością stałą, równą:

$$\Delta = 4CE - D^2 \quad (33)$$

Natomiast dla charakterystyki C-, postępując analogicznie, wynik będzie następujący:

$$x_P - x_S = \frac{t_P - t_S}{\alpha_P - \alpha_S} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_P + D}{\sqrt{-\Delta}} - \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_S + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (34)$$

W równaniach (32) i (34):

$$t_P - t_R = t_P - t_S = \Delta t \quad (35)$$

Wynik całkowania równań zgodności można zapisać jako następujący układ równań:

- równanie zgodności dla charakterystyki C+:

$$\left(\frac{v_P}{\alpha_P} - \frac{v_R}{\alpha_R} \right) + \frac{1}{\rho_1 \cdot c_o} [(p_P - p_v) - (p_R - p_v)] + \left(-\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_P + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_R + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} \right) \quad (36)$$

$$+ g \cdot \sin \gamma \cdot \Delta t + \frac{2 \cdot \tau_{wR}}{r \cdot \rho_{mR}} \cdot \Delta t = 0$$

- równanie zgodności dla charakterystyki C-:

$$\left(\frac{v_P}{\alpha_P} - \frac{v_S}{\alpha_S} \right) - \frac{1}{\rho_1 \cdot c_o} [(p_P - p_v) - (p_S - p_v)] - \left(\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_P + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_S + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} \right) \quad (37)$$

$$+ g \cdot \sin \gamma \cdot \Delta t + \frac{2 \cdot \tau_{wS}}{r \cdot \rho_{mS}} \cdot \Delta t = 0$$

Grupując stałe w powyższych równaniach (36) i (37):

$$R = \frac{v_R}{\alpha_R} + \frac{(p_R - p_v)}{\rho_1 \cdot c_o} - \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_R + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} - g \cdot \sin \gamma \cdot \Delta t - \frac{2 \cdot \tau_{wR}}{r \cdot \rho_{mR}} \cdot \Delta t \quad (38)$$

$$S = \frac{v_s}{\alpha_s} - \frac{(p_s - p_v)}{\rho_1 \cdot c_o} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_s + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} - g \cdot \sin \gamma \cdot \Delta t - \frac{2 \cdot \tau_{ws}}{r \cdot \rho_{mR}} \cdot \Delta t \quad (39)$$

otrzyma się:

$$\frac{v_p}{\alpha_p} + \frac{(p_p - p_v)}{\rho_1 \cdot c_o} - \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_p + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} = R \quad (40)$$

$$\frac{v_p}{\alpha_p} - \frac{(p_p - p_v)}{\rho_1 \cdot c_o} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_p + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} = S \quad (41)$$

Dodając stronami i porządkując, otrzyma się:

$$v_p = \frac{\alpha_p}{2} (R + S) \quad (42)$$

Odejmując stronami i porządkując, otrzyma się:

$$p_p = \frac{\rho_1 \cdot c_o \cdot (R - S)}{2} + \frac{2 \cdot \rho_1 \cdot c_o \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_p + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} + p_v \quad (43)$$

Jak udowodniono w artykule [9], nie dochodzi do pojawiania się obszarów kawitacji przejściowej, wówczas gdy $R \geq S$. Nie ma się wówczas do czynienia z przepływem nieustalonym z kawitacją, a z przepływem nieustalonym jednofazowym (tylko faza ciekła) $\alpha_p = 1$. Tym samym prędkość cieczy i ciśnienie wyznaczać się będzie z następujących wzorów:

$$p_p = \frac{\rho_1 \cdot c_o \cdot (R - S)}{2} + \frac{2 \cdot \rho_1 \cdot c_o \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} + p_v \quad (44)$$

$$v_p = \frac{1}{2} (R + S) \quad (45)$$

Natomiast gdy $R < S$, powstaje obszar kawitacji, co powoduje konieczność wprowadzenia warunku, że $p_p = p_v$ i tym samym wyznaczenia współczynnika stężenia fazy ciekłej α_p , którego wartość służy do wyznaczenia prędkości propagacji fali ciśnienia w rozpatrywanym przekroju poprzecznym i prędkości mieszanki:

$$\alpha_p = \frac{16D - H \cdot (S - R)^2 \cdot (D - 2HC)^2 - 16HC}{(S - R)^2 (D - 2HC)^2 - 16C} \quad (46)$$

$$v_p = \frac{\alpha_p}{2} (R + S) \quad (47)$$

W związku z zmianą prędkości propagacji fali ciśnienia konieczne staje się zastosowanie metod interpolacyjnych do wyznaczenia wartości parametrów przepływu w przekrojach znajdujących się pomiędzy węzłami obliczeniowymi. W wyniku zastosowania najprostszej z metod interpolacyjnych, interpolacji liniowej, otrzyma się następujący układ równań do rozwiązania, wówczas gdy kawitacja nie występuje w rozpatrywanym punkcie węzłowym P:

$$\alpha_p = 1 \quad (48)$$

$$\frac{\alpha_C - \alpha_R}{\alpha_C - \alpha_A} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_R} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_R + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (49)$$

$$\frac{V_C - V_R}{V_C - V_A} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_R} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_R + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (50)$$

$$\frac{p_C - p_R}{p_C - p_A} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_R} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_R + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (51)$$

$$p_p = \frac{\rho_1 \cdot c_o \cdot (R - S)}{2} + \frac{2 \cdot \rho_1 \cdot c_o \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_R + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} + p_v \quad (52)$$

$$v_p = \frac{1}{2}(R + S) \quad (53)$$

$$R = \frac{v_R}{\alpha_R} + \frac{(p_R - p_v)}{\rho_1 \cdot c_o} - \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_R + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} - g \cdot \sin \gamma \cdot \Delta t - \frac{2 \cdot \tau_{wR} \cdot \Delta t}{r \cdot \rho_{mR}} \quad (54)$$

$$S = \frac{v_S}{\alpha_S} - \frac{(p_S - p_v)}{\rho_1 \cdot c_o} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_S + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} - g \cdot \sin \gamma \cdot \Delta t - \frac{2 \cdot \tau_{wS} \cdot \Delta t}{r \cdot \rho_{mR}} \quad (55)$$

$$\frac{\alpha_S - \alpha_C}{\alpha_B - \alpha_C} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_S} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_S + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (56)$$

$$\frac{V_S - V_C}{V_B - V_C} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_S} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_S + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (57)$$

$$\frac{p_S - p_C}{p_B - p_C} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_S} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_S + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (58)$$

Jak widać z ostatnich wzorów, niewiadome, które trzeba wyznaczyć, są następujące: α_p , α_R , v_R , p_R , p_p , v_p , R , S , α_S , v_S , p_S .

Gdy $S > R$, wówczas kawitacja w punkcie obliczeniowym P występuje i niezbędne będzie rozwiązanie następującego układu równań ze zmiennymi uwikłanymi:

$$p_p = p_v \quad (59)$$

$$\alpha_p = \frac{16D - H \cdot (S - R)^2 \cdot (D - 2HC)^2 - 16HC}{(S - R)^2 (D - 2HC)^2 - 16C} \quad (60)$$

$$v_p = \frac{\alpha_p}{2}(R + S) \quad (61)$$

$$R = \frac{v_R}{\alpha_R} + \frac{(p_R - p_v)}{\rho_1 \cdot c_o} - \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_R + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} - g \cdot \sin \gamma \cdot \Delta t - \frac{2 \cdot \tau_{wR} \cdot \Delta t}{r \cdot \rho_{mR}} \quad (62)$$

$$S = \frac{v_S}{\alpha_S} - \frac{(p_S - p_v)}{\rho_1 \cdot c_o} + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\alpha_S + H} + \frac{C}{D - 2HC}}}{\sqrt{D - 2HC}} - g \cdot \sin \gamma \cdot \Delta t - \frac{2 \cdot \tau_{wS} \cdot \Delta t}{r \cdot \rho_{mR}} \quad (63)$$

$$\frac{\alpha_C - \alpha_R}{\alpha_C - \alpha_A} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_R} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_R + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (64)$$

$$\frac{V_C - V_R}{V_C - V_A} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_R} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_R + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (65)$$

$$\frac{p_C - p_R}{p_C - p_A} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_R} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_R + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (66)$$

$$\frac{\alpha_S - \alpha_C}{\alpha_B - \alpha_C} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_S} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_S + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (67)$$

$$\frac{V_S - V_C}{V_B - V_C} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_S} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_S + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (68)$$

$$\frac{p_s - p_c}{p_B - p_c} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\alpha_p - \alpha_s} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_p + D}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2C\alpha_s + D}{\sqrt{-\Delta}} \right) \quad (69)$$

3. WNIOSKI

Przedstawione w tym artykule podejście dotyczące uwzględnienia zmiennej prędkości propagacji fali ciśnienia opiera się na rozwiązaniach przedstawionych w pracach m. in. Wyliego i Streetera [1,12]. Różnica polega na tym, że w tamtych pracach prędkość propagacji fali ciśnienia związana była ze zmianami ciśnienia, które powodowały wydzielanie się z cieczy rozpuszczonego gazu. W tej pracy natomiast skupiono się na zmianie prędkości propagacji fali ciśnienia zależnej od zmiany objętości obszaru wypełnionego kawitacją (parą cieczy), co ważne przy stałym ciśnieniu $p=p_v$ (przy ciśnieniu prężności pary nasyconej).

Stosowanie metody charakterystyk w celu otrzymania wyżej przedstawionych układów równań nieliniowych powoduje konieczność wykorzystania interpolacji liniowej. Interpolacja liniowa stosowana jest do wyznaczenia wartości parametrów przepływu w przekrojach pomiędzy węzłami obliczeniowymi (w punkcie R i S – rys.1). Jednak w związku z nieliniowością analizowanego zagadnienia autorzy wielu prac sugerują, że może to mieć negatywny wpływ na obliczenia numeryczne (np. w postaci wzmożonego nierealistycznego tłumienia) [2,5,12].

W przyszłości zbuduje się program komputerowy, którego zadanie będzie polegało na rozwiązywaniu omówionych układów równań dla każdego punktu obliczeniowego siatki charakterystyk. Dopiero weryfikacja symulacyjna (porównania ilościowe i jakościowe rozwiązań z wykorzystaniem tego modelu z wynikami badań) pokaże, czy model ten poprawi stopień komputerowej predykcji stanów nieustalonych z kawitacją przy przepływie w przewodach zamkniętych.

LITERATURA

1. Bagieński J., Niełacny M.: Modele obliczeniowe uderzenia hydraulicznego z uwzględnieniem wydzielonego powietrza i kawitacji. „Archiwum Hydrotechniki” 1986, t. XXXIII, z. 3, 1, s. 259-266.
2. Bergant A., Simpson A.R., Tijsseling A.S.: Water hammer with column separation: a historical review. “Journal of Fluids and Structures” 2006, 22, s. 135-171.
3. Borowicz T.: Analiza nieustalonego ruchu cieczy w rurociągu metodą elementów skończonych. „Archiwum Hydrotechniki” 1978, z. 4.
4. Chaiko M.: A finite – volume approach for simulation of liquid column separation in pipelines.”Trans. of ASME” 2006, November, s. 1324-1335.
5. Chaudhry M. H.: Applied Hydraulic Transients. Second Edition, Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, 1987.
6. Chaudhry M.H., Bhallamudi S.M., Martin S.C., Naghash M.: Analysis of transient pressures in bubbly, homogeneous, gas-liquid mixtures. “ASME Journal of Fluid Engineering” 1990, 112, s. 225-231.
7. IAHR: Hydraulic transients with water column separation. IAHR Working Group 1971-1991 Synthesis Report, Enel, 2000.
8. Kono Y., Simpson A., Watanabe M.: Vapour mixture two phase flow analysis in waterhammer by upstream finite difference method. W: 7th International Conference on Pressure Surges and Fluid Transients in Pipelines and Open Channels. Harrogate, UK, 1996. BHR Group Conference Series, Publication 1996, No. 19, s. 99-108.

9. Shu J. J.: Modelling vaporous cavitation on fluid transients. "Intern. Journal of Pressure Vessels and Piping" 2003, Vol. 80, s. 187-195.
10. Shu J.J.: A finite element model and electronic analogue of pipeline pressure transients with frequency-dependent friction. "ASME Journal of Fluids Engineering" 2003, 125, s. 194-199.
11. Urbanowicz K., Zarzycki Z., Kudźma S.: Numerical simulations of transient cavitating turbulent flow using time dependent frictional losses. W: Conference Proceedings Modelling Fluid Flow (CMFF '06), Budapest, Hungary, 2006, s. 760-767.
12. Wylie E.B., Streeter V.L.: Fluid transients. McGraw-Hill, New York : Mc-Graw Hill Book Comp., 1978.
13. Zarzycki Z., Urbanowicz K.: Modelowanie stanów nieustalonych podczas uderzenia hydraulicznego z uwzględnieniem kawitacji przejściowej w przewodach ciśnieniowych. „Inżynieria Chemiczna i Procesowa” 2006, z. 3/1, t. 27, 2006, s. 915-933.

MODEL OF TRANSIENT PIPE FLOW WITH CAVITATION

Summary. The paper presents a model of bubble cavitation which takes into consideration a variable wave speed of pressure propagation. The exit model is a partial differential set of two equations including the equation of motion and continuity. They have been derived for a homogeneous mixture of liquid and its vapour. The method of characteristics was used to solve the set of partial differential equations. Inserting into these results a wave speed which is a function of volumetric fraction instead of using a constant value resulted in a complication of solution and made the researches use the method of interpolation. Because the solution is a set of ten equations with variables confounding, it can only be solved with numerical methods.

OZNACZENIA

c	- prędkość propagacji fali ciśnienia [m/s],	v	- para,
g	- przyspieszenie ziemskie [m/s^2],	m	- jednorodna mieszanina cieczy i jej pary,
p	- ciśnienie [Pa],		
p_v	- ciśnienie prężności pary nasyconej [Pa],		
t	- czas [s],		
$\hat{t} = vt / R^2$	- czas bezwymiarowy [-],		
v	- średnia prędkość przepływu [m/s],		
x	- współrzędna osiowa przewodu [m],		
L	- długość rurociągu [m],		
r	- promień rurociągu [m],		
α	- współczynnik stężenia fazy ciekłej [-],		
γ	- kąt pochylecia rurociągu [$^\circ$],		
μ	- lepkość dynamiczna [kg/ms],		
ν	- lepkość kinematyczna [m^2/s],		
ρ	- gęstość [kg/m^3],		
τ_w	- napężenie styczne na ścianie rurociągu [N/m^2],		

INDEKSY DOLNE I GÓRNE

l - ciecz,