

WPŁYW PARAMETRÓW PODŁOŻA WINKLERA NA STATECZNOŚĆ MODELU KOLUMNY GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ PRZY OBCIĄŻENIU SWOISTYM

Janusz Szmidla ^{1a}, Ilona Cieślińska - Gąsior ^{1b}

¹ Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn,

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki, Politechnika Częstochowska

^a szmidla@imipkm.pcz.pl, ^b cieslinskailona@wp.pl

Streszczenie

W pracy zaprezentowano wyniki badań teoretycznych i numerycznych kolumny geometrycznie nieliniowej poddanej działaniu obciążenia siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego, spoczywającej miejscowo na podłożu sprężystym Winklera. Jeden z prętów układu wsparto na pewnej długości podłożem sprężystym Winklera. Obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego realizowane jest poprzez głowice: wymuszającą i przyjmującą obciążenie, zbudowane z elementów o zarysie kołowym. W pracy wyznaczono wartości obciążenia bifurkacyjnego kolumny przy wybranych parametrach geometrycznych i fizycznych układu w tym usytuowania i rozmiaru podłoża sprężystego Winklera względem długości kolumny. Uzyskane wyniki symulacji numerycznych zostały porównane z rezultatami obliczeń układu liniowego miejscowo spoczywającego na podłożu Winklera (układ odniesienia). Biorąc pod uwagę zmienne parametry głowicy realizującej obciążenie, wyznaczono krzywe obrazujące zjawisko lokalnej i globalnej utraty stateczności rozważanego układu przy zadanej asymetrii sztywności na zginanie. Celem nadrzędnym pracy jest określenie optymalnych parametrów opisujących podłoże sprężyste (rozmiar i położenie), przy których uzyskuje się maksymalne wartości obciążenia bifurkacyjnego, przy zadanej jego sprężystości.

Słowa kluczowe: lokalna i globalna utrata stateczności, obciążenie bifurkacyjne, statyczne kryterium stateczności

AN INFLUENCE OF PARAMETERS OF THE WINKLER ELASTIC FOUNDATION ON THE STABILITY OF GEOMETRICALLY NONLINEAR COLUMN MODEL UNDER SPECIFIC LOAD

Summary

Results of theoretical and numerical research of geometrically nonlinear column subjected to the follower force directed towards the positive pole locally resting on the Winkler elastic foundation are presented in this paper. One of the members of the system is supported on a certain length on the Winkler elastic base. The follower force directed towards the positive pole is implemented through loading and receiving heads built of elements of a circular outlines. In this work, the values of bifurcation load for selected geometrical and physical parameters of structure, including location and size of elastic foundation in relation to the length of the column are determined. Obtained results of the numerical calculations are compared with the results corresponding to the linear system locally resting on Winkler elastic foundation (comparative system). Taking into account variable parameters of loading head, the curves presenting phenomenon of the local and global loss of stability of considered column for given asymmetry of flexural stiffness are determined. The main goal of the work is to obtain the optimal parameters describing the elastic base (length and location), for which the maximum values of the bifurcation load are achieved for given elasticity.

Keywords: local and global instability, bifurcation force, statistic stability criterion

1. WSTĘP

Układy smukłe są tematem wielu prac naukowych, w których rozpatruje się zagadnienia z zakresu ich stateczności przy różnych sposobach obciążenia i zamocowania. W zakresie badań stateczności geometrycznie nieliniowych układów smukłych rozpatrywano różne przypadki obciążenia konserwatywnego: Eulera [6], swoistego [12] oraz niekonserwatywnego (uogólnione obciążenie Becka) [5].

W pracy [11] rozpatrywano układ poddany działaniu obciążenia siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego – przypadek obciążenia swoistego, które zostało wprowadzone do literatury przez L. Tomskiego [2].

W literaturze naukowej szeroko opisano wpływ podłoża sprężystego typu Winklera na stateczność układów smukłych poddanych obciążeniom konserwatywnym, oraz niekonserwatywnym. Rozpatrzono różne sposoby podparcia podłoża: wzdłuż całej długości wszystkich prętów układu (podłoże całkowite) [1], wzdłuż całej długości wybranych prętów układu (podłoże częściowe) [7] lub na pewnym odcinku prętów wzdłuż długości układu (podłoże miejscowe) [4, 8].

W pracy [4] autorzy, analizując szereg wyników, znaleźli optymalną długość podłoża w odniesieniu do długości kolumny, dla której uzyskali maksymalną wartość obciążenia bifurkacyjnego. W publikacji [3] rozpatrywano natomiast łączny wpływ sprężystości obrotowej i translacyjnej (model Pasternaka - podłoże dwuparametrowe) na wartość obciążenia krytycznego kolumny przy działaniu rozłożonego obciążenia śledzącego.

2. MODEL FIZYCZNY UKŁADU

Na rys. 1 przedstawiono model fizyczny kolumny geometrycznie nieliniowej realizującej obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego spoczywającej miejscowo na podłożu sprężystym Winklera (układ **NW**).

Kolumna (rys. 1a) zbudowana jest z dwóch zewnętrznych prętów przyzmatycznych ①, ② o przekroju kołowym i długościach l_1, l_2 , oraz przyzmatycznego pręta środkowego o przekroju kołowym zamocowanego symetrycznie względem prętów zewnętrznych. W celu zamodelowania podłoża sprężystego o sprężystości K , pręt wewnętrzny podzielono na trzy człony ③, ④, ⑤ o jednakowej sztywności na zginanie oraz o długościach l_3, l_4, l_5 .

Biorąc pod uwagę przedstawiony opis, przyjmuje się następujące zależności odnośnie do długości l_i ($i = 1...5$), rozkładu sztywności na zginanie $(EJ)_i$ oraz sztywności na ściskanie $(EA)_i$:

- prętów zewnętrznych układów

$$l_1 = l_2 \tag{1}$$

$$(EJ)_1 = (EJ)_2 \tag{2}$$

$$(EA)_1 = (EA)_2 \tag{3}$$

- pręta środkowego

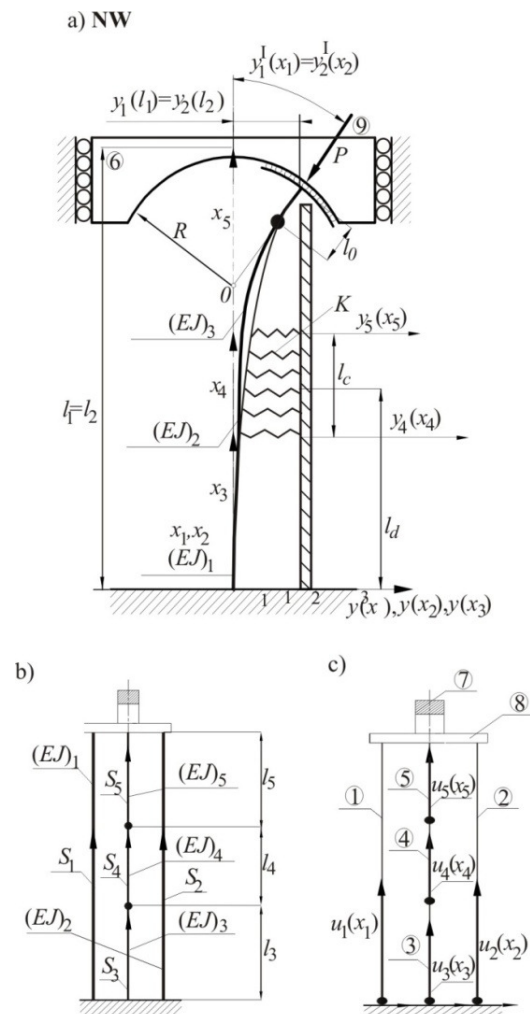
$$l_1 = l_2 = l_3 + l_4 + l_5 \tag{4}$$

$$(EJ)_3 = (EJ)_4 = (EJ)_5 \tag{5}$$

$$(EA)_3 = (EA)_4 = (EA)_5 \tag{6}$$

Pręt środkowy, na którym zamodelowano podłoże sprężyste (człon ④), scharakteryzowano mniejszą sztywnością na zginanie $(EJ)_3$ w porównaniu do sztywności na zginanie zewnętrznych prętów kolumny, czyli:

$$(EJ)_3 \leq (EJ)_1 + (EJ)_2 \tag{7}$$



Rys. 1. Model fizyczny kolumny: a) model fizyczny kolumny geometrycznie nieliniowej miejscowo spoczywającej na podłożu sprężystym Winklera **NW**; b), c) model fizyczny prętów kolumny geometrycznie nieliniowej.

Obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego (por. rys.1a) realizowane jest poprzez głowicę wywołującą ⑥ i przyjmującą ⑦, ⑧ obciążenie (por. rys. 1a) o zarysie kołowym (stała krzywizna) [10]. Kierunek działania obciążenia zewnętrznego P ⑨ przechodzi przez stały punkt O leżący na nieodkształconej osi kolumny i jest styczny do linii ugięcia swobodnego końca układu. Pręty ①, ②, ③ zamocowano sztywno (wspornikowo) ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Natomiast swobodne końce prętów ①, ②, ⑤ ($x_1 = l_1, x_2 = l_2, x_5 = l_5$) układu połączono za pomocą członu wchodzącego w skład głowicy przyjmującej obciążenie, co zapewnia równość przemieszczeń wzdłużnych i poprzecznych oraz kątów ugięć tych prętów.

W pracy przyjęto założenie, że podłoże sprężyste nie narusza symetryczności układu. Na swobodnym końcu kolumna połączona jest z głowicą przyjmującą obciążenie poprzez nieskończenie sztywny element ⑦ o długości l_0 wchodzący w skład głowicy przejmującej obciążenie. Uwzględnienie tego elementu jest niezbędne ze względu na rzeczywiste rozwiązanie głowicy realizującej obciążenie [11]. Sztywność na zginanie wymienionego elementu jest wielokrotnie większa od sztywności na zginanie układu zasadniczego. Biegun O umiejscowiono w odległości $(R-l_0)$ od swobodnego końca kolumny. Biorąc pod uwagę podłoże sprężyste Winklera, wprowadzono parametry opisujące usytuowanie i rozmiar podłoża względem długości kolumny wzory (8,9).

$$l_c^* = \frac{l_4}{l_1} = \frac{l_c}{l_1}, \quad (8)$$

$$l_d^* = \frac{l_3 + \frac{l_4}{2}}{l_1} = \frac{l_d}{l_1} \quad (9)$$

Przy opisie kolumny definiuje się współczynnik asymetrii sztywności na zginanie:

$$\mu = \frac{(EJ)_3}{(EJ)_1 + (EJ)_2}, \quad (10)$$

przyjmując, że suma sztywności na zginanie układu geometrycznie nieliniowego jest stała:

$$\sum_{i=1}^3 (EJ)_i = const \quad (11)$$

Do opisu zagadnienia stateczności układów smukłych zastosowano teorię Bernoullego-Eulera oraz teorię umiarkowanych dużych ugięć.

Całkowita energia potencjalna V układu składa się z energii: sił wewnętrznych, sprężystości zginania, sztywności podłoża sprężystego oraz składowych obciążenia zewnętrznego:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 (EJ)_i \int_0^{l_i} [y_i''(x_i)]^2 dx_i + \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 (EA)_i \int_0^{l_i} \left[\frac{1}{2} (y_i'(x_i))^2 + u_i'(x_i) \right]^2 dx_i +$$

$$- P \cdot u_i(l_i, t) + \frac{1}{2} P(R-l_0) [y_1'(l_1)]^2$$

$$+ \frac{1}{2} K_0^4 \int_0^{l_4} (y_4(x_4))^2 dx_4$$

przy czym: $y_i(x_i), u_i(x_i)$, jest odpowiednio, przemieszczeniem poprzecznym oraz wzdłużnym i -tego pręta układu ($i=1..5$)

Zagadnienie stateczności modelu kolumny geometrycznie nieliniowej rozwiązano, stosując zasadę minimum energii potencjalnej, polegającej na poszukiwaniu obciążenia, przy którym energia potencjalna przestaje być dodatnio określona ([9]).

$$\delta V = 0 \quad (13)$$

gdzie: δ – operator wariacji

Wykorzystując związek (12), po obliczeniu wariacji energii potencjalnej otrzymano:

- równania przemieszczeń poprzecznych:

$$(EJ)_j y_j^{IV}(x_j) + S_j y_j''(x_j) = 0 \quad j = 1,2,3,5$$

$$(EJ)_4 y_4^{IV}(x_4) + S_4 y_4''(x_4) + K y_4(x_4) = 0 \quad (14-15)$$

przy czym S_i opisuje wartość poszczególnych sił wewnętrznych w i -tym przecie układu.

Z definicji siły wzdłużne w prętach zewnętrznych oraz poszczególnych członach pręta środkowego wynoszą:

$$S_i(t) = - (EA)_i \left[u_i'(x_i) + \frac{1}{2} (y_i'(x_i))^2 \right], \quad i = 1..5 \quad (16)$$

- różniczkowe równania ruchu w kierunku nieodkształconej osi kolumny

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i'(x_i) + \frac{1}{2} (y_i'(x_i))^2 \right] = 0, \quad i = 1..5 \quad (17)$$

Dwukrotne scałkowanie równań (17) w odpowiadających im przedziałach i uwzględnienie zależności (16) umożliwiło wyznaczenie związków opisujących przemieszczenia wzdłużne poszczególnych prętów układu:

$$u_i(x_i) - u_i(0) = - \frac{S_i}{(EA)_i} x_i - \frac{1}{2} \int_0^{x_i} (y_i'(x_i))^2 dx_i \quad (18)$$

Geometryczne warunki brzegowe rozpatrywanego układu (por. rys. 1a)

$$\begin{aligned}
 y_1(0) &= y_2(0) = y_3(0) = 0, \\
 u_1(0) &= u_2(0) = u_3(0) = 0, \\
 y_1(l_1) &= y_2(l_2) = y_5(l_5), \\
 u_1(l_1) &= u_2(l_2) = u_5(l_5), \\
 y_1'(0) &= y_2'(0) = y_5'(0) = 0, \\
 y_1'(l_1) &= y_2'(l_2) = y_5'(l_5), \\
 y_3(l_3) &= y_4(0), \\
 u_3(l_3) &= u_4(0), \\
 y_4(l_4) &= y_5(0), \\
 u_4(l_4) &= u_5(0), \\
 y_3'(l_3) &= y_4'(0), \\
 y_4'(l_4) &= y_5'(0), \\
 y_1(l_1) &= (R - l_0)y_1'(l_1)
 \end{aligned} \tag{19-31}$$

podstawione do równania (13), umożliwiły wyznaczenie pozostałych naturalnych warunków brzegowych w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 (EJ)_1 y_1'''(l_1) + (EJ)_2 y_2'''(l_2) + (EJ)_5 y_5'''(l_5) + \\
 - \frac{1}{R - l_0} \left[(EJ)_1 y_1''(l_1) + (EJ)_2 y_2''(l_2) + (EJ)_5 y_5''(l_5) \right] = 0 \\
 y_3''(l_3) = y_4''(0), \\
 y_3'''(l_3) = y_4'''(0), \\
 y_4''(l_4) = y_5''(0), \\
 y_4'''(l_4) = y_5'''(0), \\
 \sum_{i=1}^3 S_i - P = 0,
 \end{aligned} \tag{32-38}$$

Na podstawie warunków opisujących przemieszczenie wzdłużne (por. wzory (19-35)) rozkład sił wewnętrznych jest następujący:

$$\begin{aligned}
 S_1 = S_2 = P \frac{(EA)_1}{(EA)_1 + (EA)_2 + (EA)_3} \\
 S_3 = S_4 = S_5 = P \frac{(EA)_3}{(EA)_1 + (EA)_2 + (EA)_3}
 \end{aligned} \tag{39-40}$$

Warunek (31) wynika z geometrii głowicy realizującej obciążenie.

3. WYNIKI OBLICZEŃ

Biorąc pod uwagę rozwiązanie zagadnienia brzegowego (uzyskane na podstawie równań przemieszczeń poprzecznych (14, 15) oraz warunków brzegowych (19-31, 32-38)) przeprowadzono badania numeryczne odnośnie do stateczności rozważanego układu.

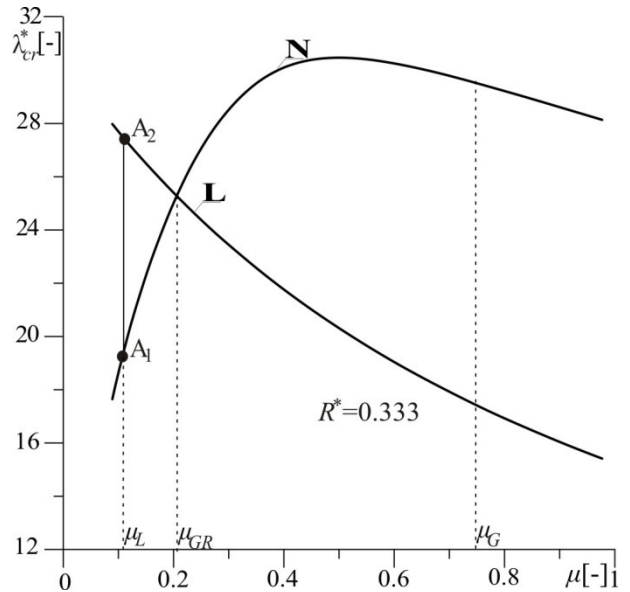
W celu umożliwienia porównania uzyskanych wyników zdefiniowano:

- bezwymiarowy parametr obciążenia bifurkacyjnego układu λ_{cr}^* (wzór (41)),
- bezwymiarowy parametr podłoża sprężystego K^* odnosząc sztywność podłoża do całkowitej długości l układu (wzór (42)):
- parametr głowicy realizującej obciążenie R^* (wzór (43))

$$\begin{aligned}
 \lambda_{cr}^* &= \frac{P_{kr} l_1^2}{\sum_{k=1}^3 (EJ)_k}, \quad K^* = \frac{K l_1^4}{\sum_{k=1}^3 (EJ)_k}, \\
 R^* &= \frac{R - l_0}{l_1}
 \end{aligned} \tag{41-42}$$

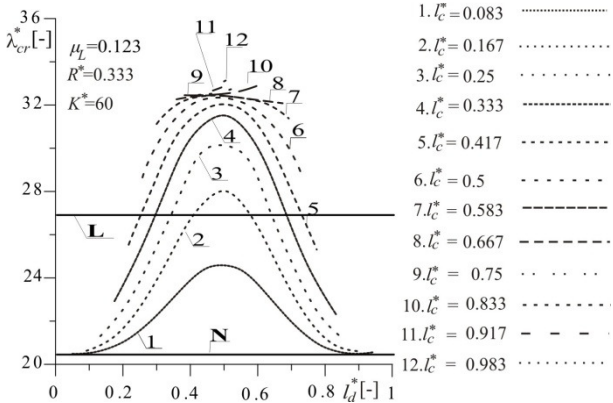
Na rys. 2 zaprezentowano zmianę wartości siły krytycznej modelu kolumny liniowej **L** oraz siły bifurkacyjnej modelu kolumny geometrycznie nieliniowej **N** w funkcji współczynnika asymetrii sztywności na zginanie μ (wzór 10).

Model fizyczny układu liniowego **L** składa się z dwóch prętów o sztywności na zginanie $(EJ)_1, (EJ)_2$ oraz ściskanie $(EA)_1, (EA)_2$ bez uwzględnienia pręta środkowego. Sztywność prętów kolumny **L** jest taka sama jak sztywność prętów ①, ② kolumny **N**, przy przyjętej asymetrii sztywności na zginanie μ kolumny geometrycznie nieliniowej. Układ liniowy **L** traktowany jest w niniejszej pracy, jako układ porównawczy. Uzyskane wartości obciążenia bifurkacyjnego układu geometrycznie nieliniowego **N** zostaną odniesione do odpowiednich wyników badań układu liniowego **L** (siły krytycznej).

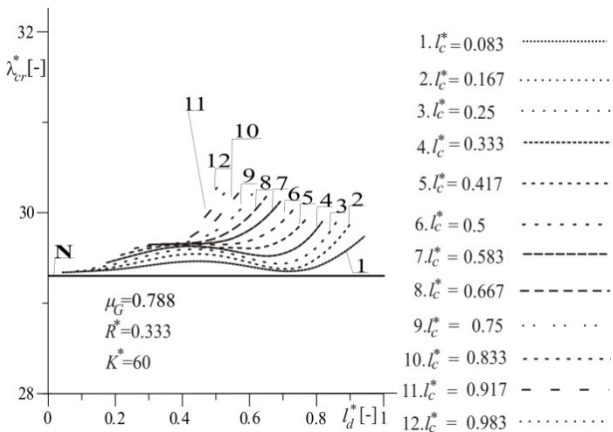


Rys. 2. Zmiana krytycznego parametru obciążenia λ_{cr}^* w funkcji współczynnika asymetrii rozkładu sztywności na zginanie μ

Wykreślone krzywe obrazują zjawisko lokalnej i globalnej utraty stateczności rozpatrywanego układu. W zakresie zmian wartości współczynnika $\mu \in (0, \mu_{GR})$ obciążenie bifurkacyjne kolumny **N** (utrata prostoliniowej równowagi statycznej) jest mniejsze od obciążenia krytycznego kolumny **L**. Za lokalną utratę stateczności układu geometrycznie nieliniowego odpowiada niestateczność pręta o mniejszej sztywności na zginanie. Usunięcie z modelu kolumny tego pręta powoduje nagły wzrost siły krytycznej (przejście od punktu A_1 do punktu A_2). W związku z powyższym w zakresie zmienności współczynnika rozkładu asymetrii sztywności na zginanie prętów $\mu < \mu_{GR}$ następuje lokalna utrata stateczności układu. W przypadku $\mu > \mu_{GR}$ występuje globalna utrata stateczności układu.



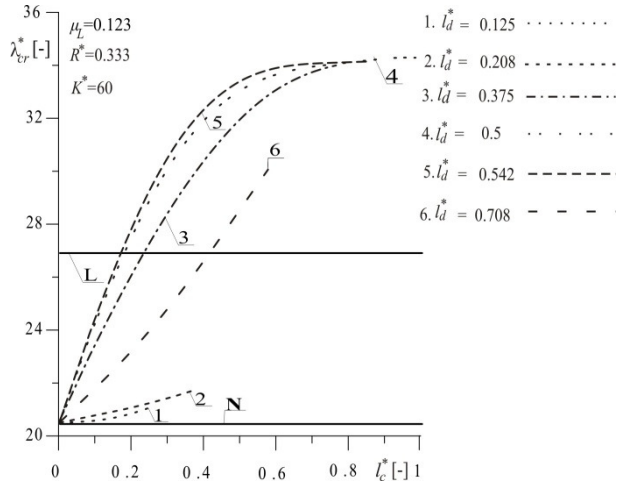
Rys. 3. Zmiana bezwymiarowego parametru obciążenia bifurkacyjnego układu **NW** w funkcji parametru opisującego miejsce wstawienia podłoża sprężystego l_d^* wzdłuż długości kolumny, w zakresie lokalnej utraty stateczności.



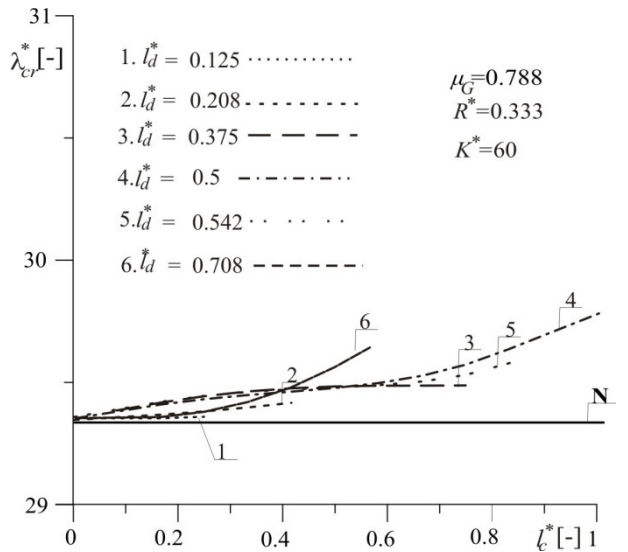
Rys. 4. Zmiana bezwymiarowego parametru obciążenia bifurkacyjnego układu **NW** w funkcji miejsca wstawienia podłoża sprężystego l_d^* wzdłuż długości kolumny, w zakresie globalnej utraty stateczności

Na rysunkach 3, 4, 5, 6 przedstawiono wpływ długości podłoża sprężystego l_c^* i miejsca jego usytuowania l_d^* na wartość bezwymiarowego parametru obciążenia bifurkacyjnego λ_{cr}^* układu **NW**. Analizę numeryczną przepro-

wadzano przy wybranych parametrach współczynnika asymetrii sztywności na zginanie w zakresie lokalnej μ_L i globalnej utraty stateczności μ_G , przy wybranym parametrze głowicy realizującej obciążenie R^* i parametrze podłoża sprężystego K^* .

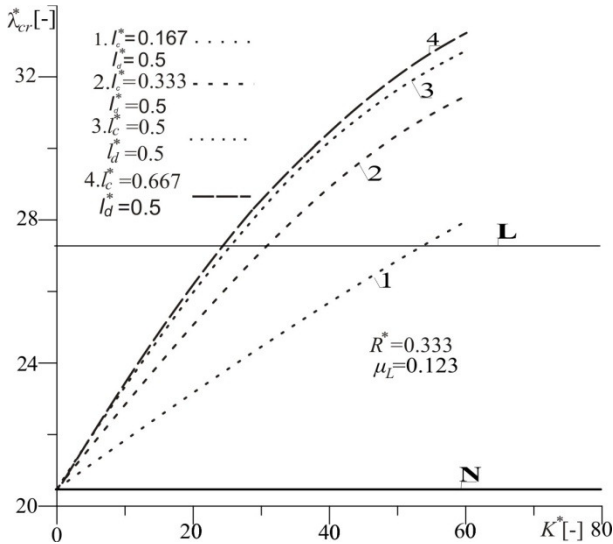


Rys. 5. Zmiana bezwymiarowego parametru obciążenia bifurkacyjnego układu **NW** w funkcji parametru długości podłoża sprężystego l_c^* , w zakresie lokalnej utraty stateczności.

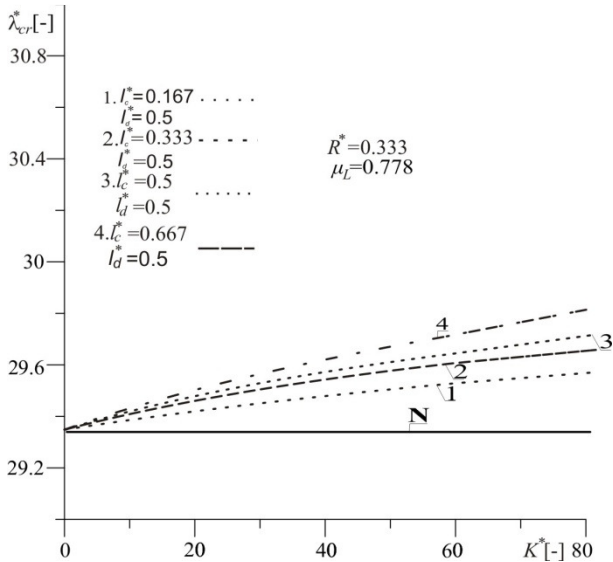


Rys. 6. Zmiana bezwymiarowego parametru obciążenia bifurkacyjnego układu **NW** w funkcji długości podłoża sprężystego l_c^* , w zakresie globalnej utraty stateczności.

Na rysunkach 7, 8 pokazano wpływ parametru sztywności podłoża sprężystego K^* na wartość bezwymiarowego parametru obciążenia bifurkacyjnego λ_{cr}^* . Obliczenia przeprowadzono przy wybranych parametrach promienia głowicy R^* oraz przy wybranych wartościach usytuowania i miejsca wstawienia podłoża sprężystego. Wraz ze wzrostem współczynnika sztywności podłoża przy zadanych długościach kolumny wzrasta wartość bezwymiarowego parametru obciążenia λ_{cr}^* .

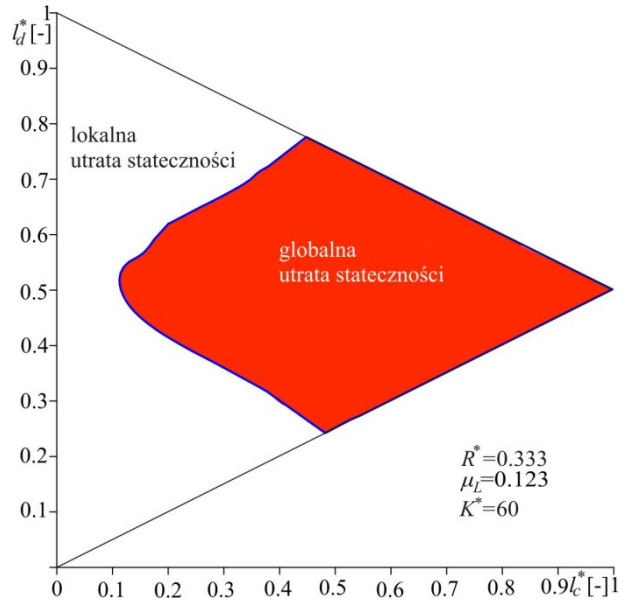


Rys. 7. Wpływ sztywności podłoża sprężystego na wartość parametru obciążenia bifurkacyjnego kolumny NW, w zakresie lokalnej utraty stateczności

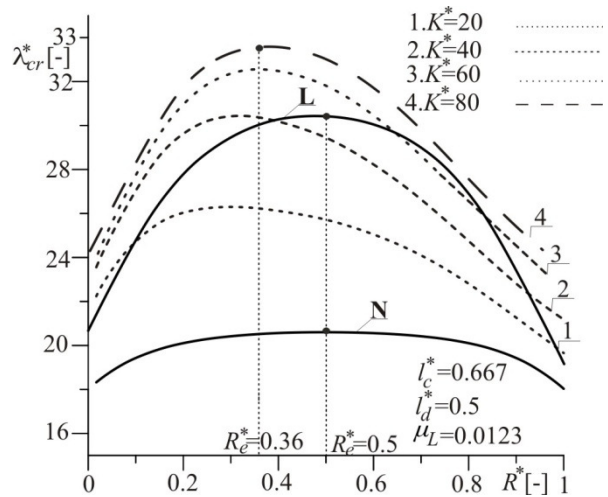


Rys. 8. Wpływ sztywności podłoża sprężystego na wartość parametru obciążenia bifurkacyjnego kolumny NW, w zakresie globalnej utraty stateczności

Wpływ długości oraz umiejscowienia podłoża sprężystego na wyjście z zakresu lokalnej utraty stateczności przedstawiono na rys. 9. Parametr obciążenia krytycznego porównawczej kolumny liniowej dla zadanego współczynnika asymetrii rozkładu sztywności na zginanie wynosi $\lambda_{cr}^* = 27.33$. Dobranie odpowiedniego parametru podłoża sprężystego pozwala przy odpowiednich wartościach parametrów l_c^* oraz l_d^* , na osiągnięcie wartości obciążenia bifurkacyjnego większego od tego parametru dla układu liniowego, a tym samym „wyjście” z zakresu lokalnej niestateczności.



Rys. 9. „Wyjście” z zakresu lokalnej utraty stateczności w funkcji parametrów długości i usytuowania podłoża sprężystego przy zadanym parametrze podłoża sprężystego



Rys. 10. Zmiana bifurkacyjnego parametru obciążenie układu NW w funkcji parametru R^* głowy wywołującej obciążenie układu przy różnych wartościach współczynnika sztywności podłoża sprężystego K^*

Na rys. 10 zaprezentowano wpływ zmiany wartości parametru głowy R^* wywołującej obciążenie na wartość parametru obciążenia bifurkacyjnego λ_{cr}^* . Obliczenia przeprowadzono dla wybranych parametrów sztywności podłoża sprężystego K^* oraz przy wybranych wartościach usytuowania i miejsca wstawienia podłoża sprężystego l_c^* , l_d^* . Wszystkie krzywe osiągają wartości ekstremalne w zależności od parametru sztywności podłoża sprężystego K^* . Wraz ze wzrostem parametru podłoża sprężystego obciążenie bifurkacyjne osiąga ekstremum przy mniejszych wartościach promienia głowy realizującej obciążenie. W przypadku kolumn **L** i **N** maksymalna wartość obciążenia występuje przy relacji $R_e^* = 0.5$.

4. WNIOSKI

Analiza otrzymanych wyników numerycznych pozwala stwierdzić, że rozważany układ w zależności od wartości współczynnika asymetrii rozkładu sztywności na zginanie charakteryzuje się lokalną lub globalną utratą stateczności. Parametr asymetrii sztywności na zginanie wpływa na wartość siły bifurkacyjnej kolumny geometrycznie nieliniowej.

Uwzględnienie w modelu fizycznym kolumny nieliniowej podłoża sprężystego typu Winklera podnosi wartość obciążenia bifurkacyjnego, jakie przenosi układ (kolumna NW). Wraz ze wzrostem sprężystości podłoża rośnie wartość bezwymiarowego parametru obciążenia bifurkacyjnego λ_{cr}^* . Podłoże sprężyste o odpowiednio dużej

sztywności powoduje „wyjście” z układu z obszaru lokalnej utraty stateczności.

Wartość obciążenia bifurkacyjnego zależna jest od parametrów, opisujących rozmiar podłoża i jego położenie względem długości układu. Parametry opisujące długość podłoża sprężystego i jego umiejscowienie są od siebie zależne. Wartości parametrów l_d^* , l_c^* odpowiadających za umiejscowienie i rozmiar podłoża sprężystego, przy których występuje „wyjścia” z zakresu lokalnej utraty stateczności są zależne od przyjętych parametrów geometrycznych głowicy realizującej obciążenie oraz od parametrów sztywności podłoża.

Badania zostały przeprowadzone w ramach grantu BS/PB-1-101-3020/11/P realizowanego na Politechnice Częstochowskiej

Literatura

1. Aristizabal-Ochoa J.D.: Classical stability of beam. In: Proceedings of the International Conference on Columns with Semi Rigid Connections on Elastic Foundation 16th ASCE Engineering Mechanics Conference, Seattle , USA, 2003, July 18 -21. CD-Rom.
2. Bogacz R., Imielowski Sz., Tomski L.: Stability and vibration of column structures subjected to generalized concentrated load, Theoretical and experimental study. “Dynamics of Continua - International Symposium”, Physikzentrum Bad Honnef, 9 -13 September 1996 p. 45-54. CD-Rom.
3. Celep Z.: Stability of a beam on an elastic foundation subjected to a nonconservative load. “Journal of Applied Mechanics”, 1980. Vol. 47, p. 116-120,
4. Elishakoff I., Wang X.: Controversy associated with the so – called „Follower Forces”: Critical Overview. “Applied Mechanics Reviews”, 2005, Vol. 58 (2) p. 117-139.
5. Hernández-Urrea J. A., Dario Aristizábal-Ochoa J.: Static and dynamic stability of an elastically restrained Beck column with an attached and mass. “Journal of Sound and Vibration”, 2008, Vol. 312, p. 789-800.
6. Przybylski J., Tomski L.: Vibration of an initially prestressed compound column under axial compression. Elsevier Science Publishers B.V 1992, Vol. 9 p. 263-268.
7. Szmidla J.: Drgania swobodne i stateczność układów smukłych poddanych obciążeniu swoistemu, rozdział 3 Drgania swobodne i stateczność kolumny geometrycznie nieliniowej niecałkowicie spoczywającej na podłożu sprężystym typu Winklera. Częstochowa: Wyd. Pol. Częstoch., 2009 .
8. Thambiratnam D., Zhuge Y.: Free vibration analysis of beams on elastic foundation. “Computers and Structures” 1996, Vol. 60, p. 971-980.
9. Tomski L.: Drgania i stateczność układów dyskretnych. Rozdz. III: Drgania swobodne I stateczność układów smukłych o jednym oraz o dwóch stopniach swobody. Pr. zbior. pod kier. nauk. i red. L. Tomskiego. Częstochowa: Wyd. Pol. Częstoch., 2006 .
10. Tomski L., Szmidla J.: Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych jako układów liniowych lub nieliniowych. Rozdz. VIII: Drgania swobodne i stateczność kolumny geometrycznie nieliniowej częściowo spoczywającej na podłożu sprężystym typu Winklera. Pr. zior. pod kier. nauk. i red. L. Tomskiego. Warszawa: WNT, 2007.
11. Tomski L., Szmidla J.: Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych, jako układów liniowych lub nieliniowych. Rozdz. VI : Drgania swobodne i stateczność wspornikowych kolumn geometrycznie nieliniowych poddanych obciążeniu swoistemu. Pr. zbior. pod kier. nauk. i red. L. Tomskiego. Warszawa: WNT, 2007.
12. Tomski L., Szmidla J.: Free vibrations of a column loaded by stretched element. „Journal of Theoretical and Applied Mechanics”, 2006, Vol. 44 (2), p. 279-298.

