

ANALIZA DYNAMICZNA ZDERZAKA BEZWŁADNOŚCIOWEGO W ZASTOSOWANIU DO POJAZDÓW – BADANIA MODELOWE

Marian Witalis Dobry

*Institut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Poznańska
Marian.Dobry@put.poznan.pl*

Streszczenie

Praca dotyczy analizy dynamicznej zderzaka bezwładnościowego skonstruowanego przez Lucjana Łągiewkę w zastosowaniu do nagłego zatrzymania pojazdów przy zderzeniu z nieruchomą przeszkodą. Model fizyczny i model matematyczny zostały opracowane na podstawie wykonanego modelu badawczego zderzaka zastosowanego do pojazdu. Rozwiązanie modelu matematycznego uzyskano metodą symulacji cyfrowej dynamiki badanego obiektu, opracowując specjalny program z wykorzystaniem programu MATLAB/simulink.

Słowa kluczowe: zderzak bezwładnościowy, dynamika zderzenia pojazdu

DYNAMICAL ANALYSIS OF INERTIAL BUMPER IN APPLICATION TO VEHICLES – MODEL STUDIES

Summary

The paper concerns the analysis of the dynamic inertial bumper constructed by Lucjan Łągiewka applied to stop vehicles immediately in collision with a stationary obstacle. The physical and mathematical models have been developed on the basis of the research metal model bumper mounted on a vehicle model. The solution of the mathematical model was obtained by numerical simulation of the dynamics of the object by developing a special program using MATLAB/simulink.

Keywords: inertial bumper, dynamics of a vehicle collision

1. WSTĘP

Przedmiotem niniejszej publikacji była analiza dynamiczna modelu zderzaka bezwładnościowego skonstruowanego przez Lucjana Łągiewkę zamocowanego na pojeździe kołowym pokazanym na rys. 1. [4, 5, 8, 9]

Badany model składa się z czterokołowego pojazdu, którego korpus wykonano z mosiądzu, a koła mocowane do korpusu za pomocą łożysk tocznych wykonano ze stopów aluminium. Na pojeździe zamontowano zderzak bezwładnościowy, na który w tym wykonaniu składają się: multiplikator, listwa

zębata, popychacz, cylinder wraz z tłokiem (sprężyna pneumatyczna), którego tłoczysko zakończone jest tarczą zderzakową. Poruszająca się listwa zębata w czasie zderzenia napędza pierwsze koło zębate dwustopniowego multiplikatora. Na ostatnim wałku multiplikatora znajduje się wirnik o dobranym eksperymentalnie momencie bezwładności – patrz: rys. 2. [4, 5].

Głównym celem przeprowadzonej analizy dynamicznej było opracowanie modelu fizycznego i matematycznego, jego rozwiązanie oraz pierwsza

weryfikacja doświadczalna na podstawie drogi hamowania. Przeprowadzona analiza dynamiczna pozwoliła wyjaśnić zjawiska zachodzące w badanym systemie mechanicznym podczas zderzenia pojazdu z nieruchomą przeszkodą.

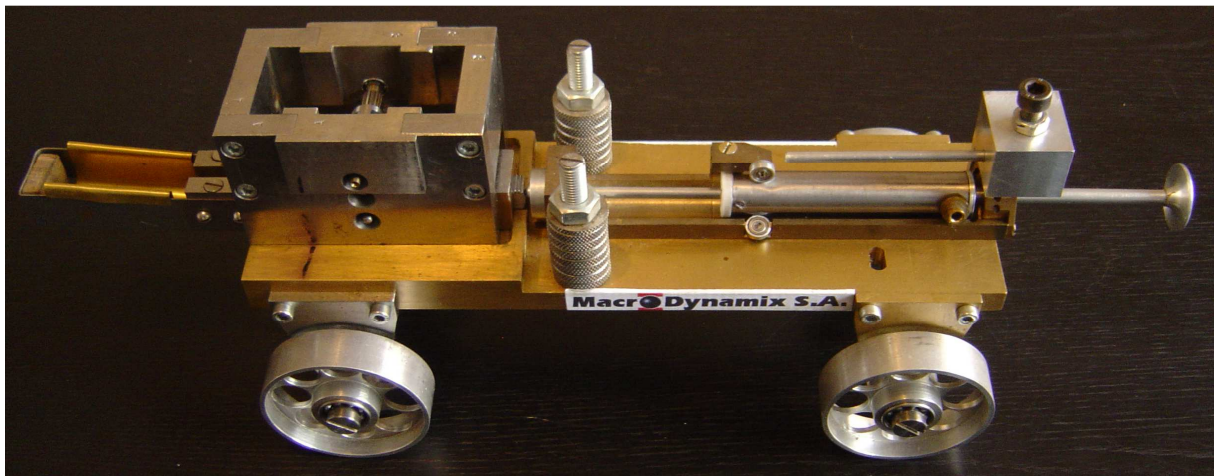
2. ANALIZA DYNAMICZNA ZDERZAKA BEZWŁADNOŚCIOWEGO W ZASTOSOWANIU DO POJAZDÓW

Proces zderzenia pojazdów ze stałą przeszkodą jest procesem bardzo dynamicznym. Zbudowany model badawczy umożliwił identyfikację parametrów elementów zderzaka i eksperymentalną weryfikację teoretycznego opisu ruchu mechanizmu zderzaka wraz z pojazdem podczas procesu zderzenia.

2.1. ANALIZA KONSTRUKCJI ZDERZAKA BEZWŁADNOŚCIOWEGO POŁĄCZONEGO Z POJAZDEM

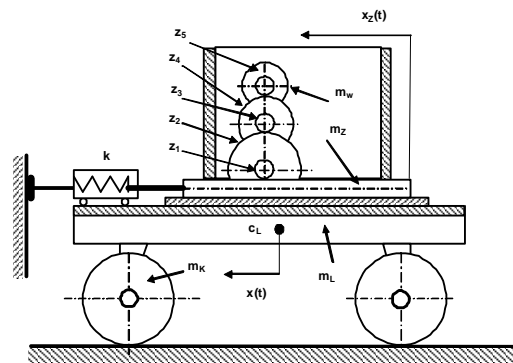
Na rys. 2 pokazano zasadniczą strukturę mechaniczną pojazdu ze zderzakiem, która została uwzględniona w opisie teoretycznym. Analiza konstrukcyjna zderzaka bezwładnościowego połączonego z pojazdem oraz jego działanie wykazały, że system ten posiada dwa stopnie swobody. Pierwszy stopień swobody związany jest z punktem redukcji należącym do korpusu pojazdu, a drugi stopień swobody związany jest z punktem redukcji zlokalizowanym na listwie zębatej zderzaka.

Listwa zębata jest prowadzona w prowadnicy na korpusie pojazdu i zazębiona jest z pierwszym kołem zębatym multiplikatora zderzaka. Na swoim końcu połączona jest za pośrednictwem popychacza z cylindrem sprężyny pneumatycznej, który z kolei połączony jest z tłoczyskiem zakończonym tarczą zderzaka.



Rys. 1. Widok modelu zderzaka bezwładnościowego zamocowanego na modelu pojazdu skonstruowanego przez Lucjana Łągiewkę [4, 5]

Do opisu teoretycznego struktury dynamicznej zderzaka przyjęto oznaczenia elementów konstrukcyjnych zestawione w tabeli 1. W tabeli podano również zidentyfikowane wartości parametrów dynamicznych i wszystkich elementów składowych modelu pojazdu ze zderzakiem.



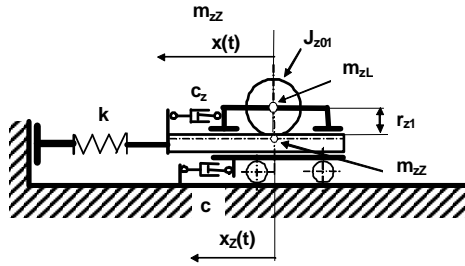
Rys. 2. Struktura dynamiczna zderzaka dynamicznego zamontowanego na pojeździe [4, 5]

Analiza dynamiczna zderzaka zastosowanego do pojazdu przedstawiona w niniejszym artykule dotyczy opisu zjawisk zachodzących podczas ruchu pojazdu od chwili wejścia w przypór tarczy zderzaka z przeszkodą stałą z określoną prędkością początkową aż do zatrzymania się pojazdu.

2.2. MODEL FIZYCZNY I MATEMATYCZNY ZDERZAKA BEZWŁADNOŚCIOWEGO Z POJAZDEM

2.2.1. MODEL FIZYCZNY ZDERZAKA BEZWŁADNOŚCIOWEGO Z POJAZDEM

Model fizyczny systemu mechanicznego zderzaka z pojazdem pokazano na rys. 3. Posiada on dwa stopnie swobody i punkty redukcji związane są z masą korpusu pojazdu - m_{zL} i masą listwy zębatej zderzaka - m_{zZ} . Listwa zębata zderzaka wraz ze sprężyną pneumatyczną ślizga się w prowadnicy korpusu i oddziałuje na niego siłą tarcia.



Rys. 3. Model fizyczny zderzaka bezwładnościowego z pojazdem

Jak wspomniano wyżej, jako punkty redukcji i współrzędne uogólnione przyjęto:

1) pierwszy punkt redukcji - m_{zL} związany z korpusem pojazdu, którego położenie określa współrzędna $q_1(t) = x(t)$, czyli - współrzędna położenia korpusu pojazdu, mierzona od chwili kontaktu tarczy zderzaka z podporą stałą;

2) drugi punkt redukcji - m_{zZ} związany z listwą zębatą, której położenie określa współrzędna $q_2(t) = x_z(t)$, czyli - współrzędna położenia listwy zębatej zderzaka, mierzona od chwili kontaktu tarczy zderzaka z podporą stałą.

2.2.2. MODEL MATEMATYCZNY

Model matematyczny zderzaka z pojazdem opracowano z wykorzystaniem równań Lagrange'a drugiego rodzaju, których postać przedstawia równanie (1) [1, 2, 7, 10, 11]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial E}{\partial q_j} \right) = Q_j + Q_{Pj} + Q_{Rj}; \quad j=1,2,\dots,s; \quad (1)$$

gdzie:

s - liczba stopni swobody,

E - energia kinetyczna systemu,

$Q_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$ - siły czynne zewnętrzne,

$Q_{Pj} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ - siły potencjalne, V - energia

potencjalna systemu,

$Q_{Rj} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}$ - siły dyssypacji, funkcja mocy

dyssypacji energii,

q_j - współrzędne uogólnione,

\dot{q}_j - prędkości uogólnione.

W badaniach modelowych wprowadzono następujące założenia upraszczające:

- 1) założono liniowy, proporcjonalny do prędkości opór ruchu korpusu pojazdu,
- 2) założono, że siły oporu ruchu listwy zębatej zderzaka są wprost proporcjonalne do prędkości względnej korpusu pojazdu i listwy zębatej,
- 3) założono liniowy model siły sprężystości wytwarzanej przez poduszkę powietrzną w cylindrze pneumatycznym zderzaka.

Modelowy system mechaniczny zderzaka z pojazdem posiada następujące energie:

a) energia kinetyczna całego systemu mechanicznego jest równa:

$$E = \frac{1}{2} \left(m_L + 4m_k + \frac{4J_{0K}}{r_K^2} \right) \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} \left[J_{z1} + J_{z2} + (J_{z3} + J_{z4}) \left(\frac{z_3}{z_1} \right) + (J_{z4} + J_w) \left(\frac{z_3}{z_1} \right) \left(\frac{z_4}{z_5} \right) \right] \left(\frac{\dot{x}(t) - \dot{x}_z(t)}{r_{z1}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_z \dot{x}_z^2(t) = \frac{1}{2} m_{zL} \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} J_{z01} \left(\frac{\dot{x}(t) - \dot{x}_z(t)}{r_{z1}} \right)^2; \quad (1a)$$

b) energia potencjalna:

$$V = \frac{1}{2} k x_z^2(t); \quad (1b)$$

c) moc dyssypacji - funkcja Rayleigha:

$$\Phi = \frac{1}{2} c x^2(t) + \frac{1}{2} c_z [\dot{x}(t) - \dot{x}_z(t)]^2; \quad (1c)$$

W rezultacie zastosowania równań Lagrange'a drugiego rodzaju (1) i po podzieleniu każdego z równań sił przez zastępcze, zredukowane współczynniki mas otrzymano następujący model matematyczny - równania różniczkowe ruchu [5]:

$$\begin{aligned} 1) \quad \ddot{x} + \frac{(c+c_z)}{m_{zL}} \dot{x} - \frac{J_{z01}}{r_{z1}^2 m_{zL}} \ddot{x}_z - \frac{c_z}{m_{zL}} \dot{x}_z &= 0; \\ 2) \quad -\frac{J_{z01}}{r_{z1}^2 m_{zZ}} \ddot{x} - \frac{c_z}{m_{zZ}} \dot{x} + \ddot{x}_z + \frac{c_z}{m_{zZ}} \dot{x}_z + \frac{k}{m_{zZ}} x_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie:

$$m_{zL} = m_L + 4m_k + \frac{4J_{0K}}{r_K^2} + \frac{J_{z01}}{r_{z1}^2}; \quad (3)$$

- zredukowany, zastępczy współczynnik masy punktu redukcji związanego z korpusem pojazdu, gdzie:

- m_L – masa korpusu pojazdu,
- m_K, J_{0K} – masa i moment bezwładności jednego koła pojazdu,
- J_{z01} – moment bezwładności multiplikatora zredukowany do osi koła zębatego z_1 ;
- r_{z1} – promień koła zębatego z_1 .

Wymieniony wyżej moment bezwładności multiplikatora zredukowany do osi koła zębatego nr 1 – z_1 wynosi:

$$J_{z01} = \left[(J_{z1} + J_{z2}) + (J_{z3} + J_{z4}) \left(\frac{z_2}{z_3} \right)^2 + (J_{z5} + J_w) \left(\frac{z_2}{z_3} \right)^2 \left(\frac{z_4}{z_5} \right)^2 \right] \quad (4)$$

gdzie:

- J_{zn} – moment bezwładności koła zębatego nr n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$),
- J_w – moment bezwładności wirnika,
- z_n – liczba zębów koła zębatego nr n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$),
- c – zastępczy, zredukowany współczynnik tłumienia ruchu korpusu pojazdu,
- c_z – zastępczy, zredukowany współczynnik tłumienia ruchu zębatki,
- k – zastępczy współczynnik sprężystości sprężyny zderzaka,

Zredukowany, zastępczy współczynnik masy zębatki wynosi:

$$m_{zz} = m_z + \frac{J_{z01}}{r_{z1}^2} \quad (5)$$

Opracowany model matematyczny zderzaka wykazuje dwa rodzaje sprzężeń między punktami redukcji (2). Są to: sprzężenie bezwładnościowe i sprzężenie tarciove. W badanym systemie brakuje występującego zwykle w zderzakach sprzężenia sprężystego.

Jak wynika z modelu matematycznego, na system nie działają żadne siły czynne zewnętrzne. Ruch systemu w procesie zderzenia realizuje się dzięki niezerowym warunkom początkowym punktów redukcji - masy pojazdu i listwy zębatej. Oba punkty redukcji na początku obserwacji mają takie same warunki początkowe pokazane poniżej (6) i (7):

$$\begin{aligned} &\text{pojazd:} \\ &- \text{prędkość początkowa: } v(0) = v_{0L}; \\ &- \text{położenie początkowe: } x(0) = 0; \\ &\text{oraz:} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\text{listwa zębata:} \\ &- \text{prędkość początkowa: } v_z(0) = v_{0z}; \\ &- \text{położenie początkowe: } x_z(0) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

W ten sposób zdefiniowano jednoznacznie model matematyczny bezwładnościowego zderzaka zastosowanego do pojazdu. Zarówno pojazd jak i zderzak posiadają prędkość początkową równą prędkości zderzenia (najazdu) pojazdu na oporę stałą. Ruch obrotowy kół zębatych multiplikatora z wirnikiem rozpoczyna się, jeśli zaistnieje różnica liniowych prędkości listwy zębatej i pojazdu.

Ruch całego badanego systemu mechanicznego w czasie zderzenia, prędkości oraz przyspieszenia punktów redukcji określić można na drodze rozwiązania powyższego układu różniczkowych równań ruchu (2).

2.3. ROZWIĄZANIE MODELU MATEMATYCZNEGO - UKŁADU RÓŻNICZKOWYCH RÓWNAŃ RUCHU

W celu rozwiązania modelu matematycznego opracowano specjalny program symulacyjny z wykorzystaniem środowiska MATLAB/Simulink. Umożliwił on pełną symulację dynamiki procesu zderzenia badanego układu dynamicznego z nieruchomą przeszkodą oraz różne badania dynamiczne, dające odpowiedź na szereg nierozwiązanych jeszcze kwestii.

Postawione w tej pracy zadanie wymagało zweryfikowania opracowanej teorii. W tym celu zidentyfikowano parametry dynamiczne modelu zderzaka zamocowanego na pojeździe oraz parametry elementów modelu. Uzyskane wartości pokazano również w tabeli 1.

Tabela 1. Parametry elementów konstrukcyjnych modelu zderzaka bezwładnościowego zastosowanego do zatrzymania pojazdu

Wyszczególnienie, oznaczenie, wartość, jednostka	
Masa kół pojazdu, $m_K = 0,2$ kg	Masa ramy pojazdu i korpusu, $m_r = 7,5$ kg
Masa kół zębatych 2 i 4 $m_{z2} = m_{z4} = 0,005$ kg	Masa wirnika, $m_w = 0,05$ kg
Liczba zębów kół 1, 3 i 5, $z_1 = z_3 = z_5 = 13$	Liczba zębów kół 2 i 4, $z_2 = z_4 = 42$
Moment masowy wirnika, $J_w = 3,701E-008$ [kgm ²],	Współczynnik sprężystości sprężyny $k = 2000$ [N/m]
Masa zębatki i cylindra, $m_z = 0,035$ kg	Masa kół zębatych z_1, z_3 i z_5 : $m_{z1} = m_{z3} = m_{z5} = 0,005$ kg
Masa zębatki, $m_z = 0,01$ kg	Zębatka – liczba zębów, $z_z = 38$
Promienie kół z_1, z_3 i z_5 : $r_{z1} = r_{z3} = r_{z5} = 0,0035$ m	Promienie kół $z_2 = z_4$: $r_{z2} = r_{z4} = 0,01$ m
Współczynnik tłumienia ruchu korpusu pojazdu $c = 100$ [Ns/m]	Współczynnik tłumienia ruchu zębatki $c_z = 100$ [Ns/m]

Dysponując realnym modelem zderzaka z pojazdem (rys.1) umożliwiającym eksperymenty i pomiary różnych wielkości, można było wstępnie określić między innymi wartości współczynników strat energii [3, 6]. Dodatkowe eksperymenty polegały na wstępnych pomiarach drogi pojazdu i przemieszczenia zderzaka, które przebywa listwa zębata w procesie zderzenia oraz na obserwacji zachowania się korpusu pojazdu i wirnika [4, 5].

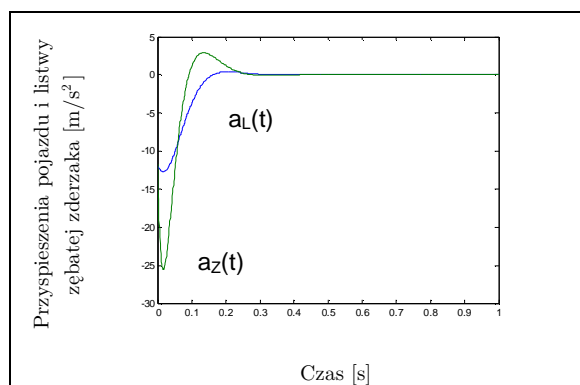
Otrzymane w ten sposób dane porównywano z danymi uzyskiwanymi z symulacji cyfrowej dynamiki pojazdu ze zderzakiem bezwładnościowym. Zaobserwowano takie same drogi hamowania realnego modelu pojazdu podczas eksperymentu i symulacji cyfrowej jego ruchu.

2.4. REZULTATY SYMULACJI DYNAMIKI PROCESU ZDERZENIA POJAZDU Z NIERUCHOMĄ PRZESZKODĄ

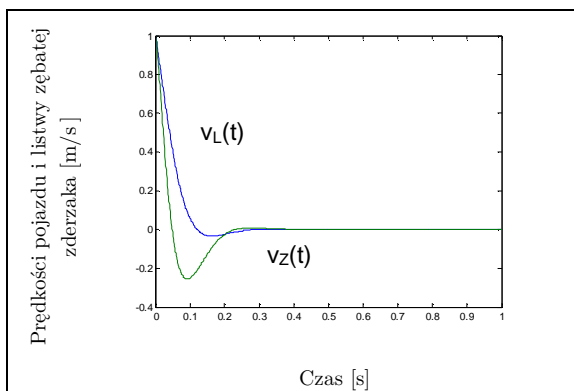
Wyniki symulacji dynamiki procesu zderzenia przedstawiono na rys. 4, 5, 6 i 7. Zestawiono tam przebiegi w czasie: przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń w procesie zderzenia dla obu punktów redukcji: korpusu pojazdu i masy zębatego wirnika zderzaka.

Jako warunki początkowe dla pojazdu i listwy zębatej przyjęto równe wartości początkowe prędkości i położenia:

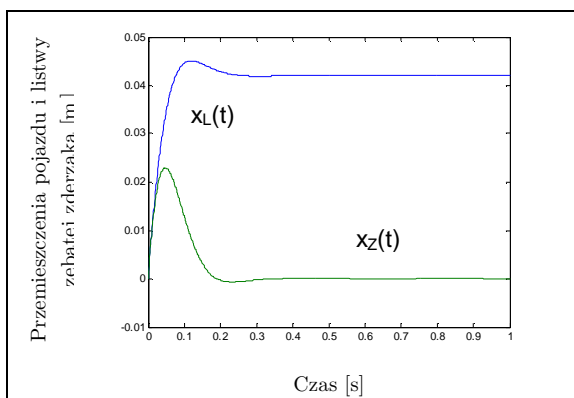
$$V(0) = V_{0L} = V_{0z} = 1 \text{ m/s}, x(0) = x(0) = x_z(0) = 0. \quad (8)$$



Rys. 4. Porównanie przyspieszeń pojazdu $a_L(t)$ i listwy zębatej zderzaka $a_z(t)$



Rys. 5. Porównanie prędkości pojazdu $v_L(t)$ i listwy zębatej zderzaka $v_z(t)$



Rys. 6. Porównanie przemieszczeń pojazdu $x_L(t)$ i listwy zębatej zderzaka $x_z(t)$

Opóźnienie pojazdu zmniejsza się szybko do wartości równej zero, którą osiąga w chwili $t = 0,163$ s.

Analiza uzyskanych rezultatów wykazała, że maksymalne ujemne przyspieszenie, czyli opóźnienie korpusu modelu pojazdu ze zderzakiem, osiąga wartość równą $(-)$ $12,73 \text{ m/s}^2$ w chwili $t = 0,0165$ pierwszego kontaktu zderzaka z przeszkodą.

Następnie wartość przyspieszenia pojazdu nieznacznie wzrasta ponad zero do $0,39 \text{ m/s}^2$, by ostatecznie osiągnąć wartość zero dla czasu $t = 0,36$ s.

Prędkość obu punktów redukcji maleje od wartości początkowej 1 m/s do wartości równej zero w czasie $0,3$ s – dla masy pojazdu, oraz w czasie $0,045$ s dla listwy zębatej. Po tym czasie wartość prędkości pojazdu uzyskuje małe wartości ujemne z maksimum równym $0,034 \text{ m/s}$ dla czasu $0,16$ s. Po osiągnięciu maksimum ujemnego prędkość zmierza do zera. Prędkość listwy zderzaka osiąga w czasie zderzenia również małą wartość ujemną.

Z powyższego wynika, że zatrzymanie pojazdu zachodzi w bardzo krótkim czasie i pojazd zatrzymuje się na dystansie $0,042 \text{ m}$ od chwili wejścia zderzaka w kontakt ze stałą przeszkodą. Pojazd przebywa w czasie zderzenia drogę około $0,045 \text{ m}$ w kierunku do przeszkody w czasie około $0,2$ s po czym cofa się

nieznacznie o 0,003 m do położenia 0,042 m i w tej pozycji pozostaje w bezruchu od chwili $t = 0,3$ s.

Listwa zębata przemieszcza się w stronę przeszkody o 0,0229 m w czasie 0,047 s, po czym dla czasu równego 0,3 s osiąga położenie wyjściowe równe zero.

Powyższa analiza dynamiczna wykazała, że model zderzaka bezwładnościowego w zastosowaniu do modelowego pojazdu spełnił swoją rolę. Modelowy pojazd zatrzymał się w krótkim czasie 0,3 s.

Uzyskane rezultaty wyjaśniają działanie mechanizmu zderzaka bezwładnościowego Łągiewki [8, 9]. Pokazane rezultaty analizy dynamicznej na wszystkich trzech rysunkach 4, 5, i 6, jednoznacznie opisują ruch pojazdu i listwy zębatej w czasie hamowania i umożliwiają porównanie przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń obu punktów redukcji.

Na rysunkach 4 i 5 widoczne jest wyraźnie zatrzymanie się pojazdu w chwili $t = 0,3$ s, dla której oba punkty redukcji osiągają wartość zerową przyspieszenia i prędkości.

Zastosowanie symulacji cyfrowej dynamiki zderzaka bezwładnościowego umożliwiło również obliczenie zmian prędkości obrotowej wirnika zamocowanego na ostatnim wałku multiplikatora w czasie procesu zderzenia. Ten przebieg pokazano na rys. 7. Wirnik zderzaka szybko zwiększa obroty od zera w chwili kontaktu tarczy zderzaka z przeszkodą do wartości maksymalnej - 12 586 obr./min w chwili $t = 0,059$ s.

Następnie obroty zmniejszają się gwałtownie do zera w chwili $t = 0,202$ s i wirnik zaczyna obracać się w drugą stronę do niewielkiej prędkości maksymalnej równej 394 obr./min w chwili $t = 0,245$. Po osiągnięciu tej wartości, prędkość wirnika zmniejsza się i osiąga wartość zero dla czasu $t = 0,37$ s. Jest to chwila zatrzymania się całego systemu mechanicznego pojazdu ze zderzakiem bezwładnościowym.

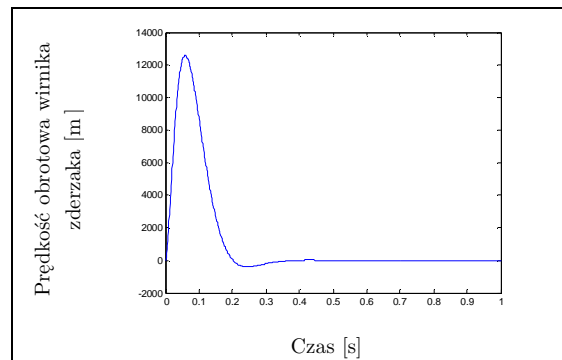
Listwa zębata przemieszcza się w stronę przeszkody o 0,0229 m w czasie 0,047 s, po czym dla czasu równego 0,3 s osiąga położenie wyjściowe równe zero.

Omówione powyżej rezultaty analizy dynamicznej zderzaka bezwładnościowego zastosowanego do pojazdu wyjaśniły zasady działania zderzaka i wykazały jego przydatność praktyczną do zatrzymywania pojazdów bez ich uszkodzania.

3. WNIOSKI

Przeprowadzona analiza dynamiczna modelu pojazdu z zastosowanym zderzakiem bezwładnościowym Łągiewki [8, 9] wykazała bardzo dobre właściwości tego rozwiązania konstrukcyjnego do zatrzymywania pojazdu w przypadku kolizji z przeszkodą stacjonarną. Model pojazdu o masie 7,5kg wytracił opóźnienie i prędkość początkową ruchu

bardzo szybko, bo w czasie równym zaledwie 0,3 s i zatrzymał się, przebywając drogę równą 0,042 m.



Rys. 7. Zmiana prędkości obrotowej wirnika zderzaka bezwładnościowego w czasie trwania zderzenia

Zaobserwowano również bardzo małą prędkość wznowienia ruchu powrotnego pojazdu (praktycznie brak odbicia) i po czasie 0,3 s pojazd znajdował się w spoczynku.

Zaprezentowana analiza dynamiczna opisuje zjawiska zachodzące w badanym mechanizmie pojazdu ze zderzakiem i wyjaśnia szereg wątpliwości dotyczących zasady działania zderzaka.

Opracowany model matematyczny umożliwia badanie dynamiki zderzaka bezwładnościowego w różnej skali w zastosowaniach do samochodów osobowych, ciężarowych, pojazdów specjalnych oraz w innych zastosowaniach zderzaka Łągiewki [8, 9].

Ponadto opracowany model matematyczny oraz program symulacji cyfrowej rozwiązujący ten model pozwala przeprowadzić badania optymalizacyjne oraz wspomagać konstruktorów przy projektowaniu zderzaka przeznaczonego do różnych pojazdów i innych obiektów technicznych.

Zrealizowanie niniejszej pracy było możliwe dzięki dostarczeniu przez Firmę MACRODYNAMIX S.A. z siedzibą w Poznaniu miniaturowego modelu badawczego pojazdu z dynamicznym zderzakiem bezwładnościowym skonstruowanego i wykonanego przez Łągiewkę oraz częściowemu finansowaniu przez ww. firmę badań teoretycznych i eksperymentalnych zderzaka bezwładnościowego [4].

Literatura

1. Cannon R. H. jr.: Dynamika układów fizycznych. Cz. A: Równania ruchu układów fizycznych. Warszawa: WNT, 1973.
2. Dietrich M.: Podstawy konstrukcji maszyn. T. 1. Wyd. 2. Warszawa: WNT, 1995.
3. Dobry M. W.: Optymalizacja przepływu energii w systemie Człowiek – Narzędzie – Podłoże /CNP/. Poznań: Wyd. Pol. Poznańskiej, 1998. Seria: Rozprawy Nr 330.
4. Dobry M. W.: Opracowanie energetycznych podstaw teoretycznych konstrukcji zderzaka dynamicznego wraz z pojazdem lokomotywki – wykonanie modelowe. Poznań 2002. Raport z badań: etap I. MACRODYNAMIX S.A.
5. Dobry M. W.: Theoretical foundations of a dynamic inertial bumper design. “Vibrations in Physical Systems”, COMPRINT, 2006, Vol. XXII, p. 107-112.
6. Dobry M. W.: Podstawy diagnostyki energetycznej systemów mechanicznych i biomechanicznych. Poznań-Radom: Wydawnictwo Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji – PIB, 2012.
7. Kaliski S.: Drgania i fale. Rozdz. III, § 1: Metody konstrukcji równań ruchu liniowych układów mechanicznych. Warszawa: PWN, 1966, s. 186 – 211.
8. Łągiewka L., Dobry M. W.: Akumulator energii kinetycznej, zwłaszcza przestrzennych obiektów będących w ruchu. Zgłoszenie patentowe nr P.357620. Urząd Patentowy RP, Warszawa 9.12.2002.
9. Łągiewka L., Dobry M. W.: Kinetic energy absorber, particularly for large mobile objects, No. PCT/PL2003/000134, 05.12.2003, Intern. Publ. Number WO 2004/053352 A1, International Application Published under the Patent cooperation Treaty (PTC), 24.06.2004.
10. Leyko J.: Mechanika ogólna. T.2.: Dynamika. Wyd. 3 popr. Warszawa: PWN, 1975.
11. Parszewski Z. A.: Drgania i dynamika maszyn. Warszawa: WNT, 1982.