

PURC W ROZWIĄZYWANIU TRÓJWYMIAROWYCH ZAGADNIĘŃ BRZEGOWYCH MODELOWANYCH RÓWNANIAM NAVIERA-LAMEGO W OBSZARACH WIELOKĄTNYCH

EUGENIUSZ ZIENIUK, KRZYSZTOF SZERSZEŃ, AGNIESZKA BOŁTUĆ

*Instytut Informatyki, Zakład Metod Numerycznych, Uniwersytet w Białymstoku
e-mail: ezieniuk@ii.uwb.edu.pl, kszerszen@ii.uwb.edu.pl, aboltuc@ii.uwb.edu.pl*

Streszczenie. W pracy przedstawiono formułę parametrycznych układów równań całkowych (PURC) dla przestrzennych zagadnień liniowej sprężystości opisywanych równaniami Naviera-Lamego. Na tej podstawie zaprezentowano sposób uzyskiwania rozwiązań zarówno na brzegu oraz w obszarze. Dokonano także wstępnej weryfikacji numerycznej proponowanego podejścia dla obszarów wielokątnych.

1. WSTĘP

Od wielu lat autorzy pracy do rozwiązywania zagadnień brzegowych stosują parametryczne układy równań całkowych (PURC). Dotychczas PURC były głównie wykorzystywane do rozwiązywania dwuwymiarowych potencjalnych zagadnień brzegowych modelowanych cząstkowymi równaniami różniczkowymi takimi jak: Laplace'a [2,4], Poissona [6], Helmholtza [5] czy Naviera-Lamego [7]. Równania te były zapisywane w alternatywnej postaci, za pomocą PURC, które to w swoim formalizmie matematycznym uwzględniały kształt brzegu rozpatrywanego zagadnienia brzegowego, zdefiniowany w sposób ogólny za pomocą krzywych stosowanych w grafice komputerowej. Kształt brzegu mógł być definiowany za pomocą takich krzywych jak: Béziera, B-spline czy Hermite'a, a do jego praktycznego zdefiniowania fizycznie zadawano niewielką liczbę punktów kontrolnych. Złożoność modelowania kształtu brzegu w PURC jest zależna od złożoności kształtu rozpatrywanego obszaru. Niemniej jednak takie jego zdefiniowanie wyeliminowało konieczność wprowadzania tradycyjnych elementów brzegowych czy skończonych, co jest szczególnie nieefektywne w przypadku rozwiązywania zagadnień syntezy wymagających procesu iteracyjnego. Uzyskane wyniki dla zagadnień modelowanych wspomnianymi równaniami były porównywane z wynikami uzyskanymi na podstawie klasycznych metod numerycznych takich jak: MES i MEB. Wysoka dokładność rozwiązań oraz efektywność metody dla rozpatrywanych zagadnień była zachęcająca do jej uogólniania na przestrzenne potencjalne zagadnienia brzegowe. Dotychczas rozpatrywano zagadnienia trójwymiarowe modelowane jedynie równaniami potencjalnymi Laplace'a [8] oraz Helmholtza [9]. Uogólnienie metody na zagadnienia przestrzenne wymaga analitycznej modyfikacji tradycyjnych brzegowych równań całkowych (BRC). Celem niniejszej pracy jest przedstawienie możliwości zastosowania PURC do rozwiązywania zagadnień brzegowych

liniowej sprężystości modelowanych równaniami Naviera-Lamego w obszarach wielokątnych oraz numerycznej weryfikacji prezentowanej strategii.

2. PURC DLA RÓWNAŃ NAVIERA-LAMEGO W OBSZARACH WIELOKĄTNYCH

PURC dla trójwymiarowych równań Naviera-Lamego został otrzymany w wyniku analitycznej modyfikacji klasycznych BRC. Metodologia takiej modyfikacji dla potencjalnych zagadnień dwuwymiarowych w obszarach wielokątnych została przedstawiona w [7,2], natomiast w obszarach krzywoliniowych w [4,5]. Uogólniając modyfikację na trójwymiarowe obszary dla równań Naviera-Lamego, otrzymano następującą postać PURC

$$0.5\mathbf{u}_l(v_1, w_1) = \sum_{j=1}^n \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{w_{j-1}}^{w_j} \left\{ \bar{U}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) \mathbf{p}_j(v, w) - \bar{P}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) \mathbf{u}_j(v, w) \right\} J_j(v, w) dv dw \quad (1)$$

przy czym $v_{l-1} < v_1 < v_l$, $w_{l-1} < w_1 < w_l$, $v_{j-1} < v < v_j$, $w_{j-1} < w < w_j$, $l = 1, 2, 3, \dots, n$, gdzie n – jest liczbą płatów powierzchniowych kreujących zamknięty trójwymiarowy obszar.

Funkcje podcałkowe $\bar{U}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w)$, $\bar{P}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w)$ w (1) są przedstawiane w następującej postaci macierzowej

$$\bar{U}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu\eta} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (2)$$

$$\bar{P}_{lj}^*(v_1, w_1, v, w) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)\eta^2} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Pszczególne elementy w macierzy (2) w jawnej postaci można przedstawić

$$\begin{aligned} U_{11} &= (3-4\nu) + \frac{\eta_1^2}{\eta^2}, & U_{12} &= \frac{\eta_1\eta_2}{\eta^2}, & U_{13} &= \frac{\eta_1\eta_3}{\eta^2}, \\ U_{21} &= \frac{\eta_2\eta_1}{\eta^2}, & U_{22} &= (3-4\nu) + \frac{\eta_2^2}{\eta^2}, & U_{23} &= \frac{\eta_2\eta_3}{\eta^2}, \\ U_{31} &= \frac{\eta_3\eta_1}{\eta^2}, & U_{32} &= \frac{\eta_3\eta_2}{\eta^2}, & U_{33} &= (3-4\nu) + \frac{\eta_3^2}{\eta^2}, \end{aligned}$$

natomiast w macierzy (3) są przedstawiane za pomocą

$$\begin{aligned} P_{11} &= ((1-2\nu) + 3\frac{\eta_1^2}{\eta^2}) \frac{\partial\eta}{\partial n}, & P_{12} &= 3\frac{\eta_1\eta_2}{\eta^2} \frac{\partial\eta}{\partial n} - (1-2\nu) \frac{\eta_1n_2 - \eta_2n_1}{\eta}, \\ P_{13} &= 3\frac{\eta_1\eta_3}{\eta^2} \frac{\partial\eta}{\partial n} - (1-2\nu) \frac{\eta_1n_3 - \eta_3n_1}{\eta}, & P_{21} &= 3\frac{\eta_2\eta_1}{\eta^2} \frac{\partial\eta}{\partial n} - (1-2\nu) \frac{\eta_2n_1 - \eta_1n_2}{\eta}, \\ P_{22} &= ((1-2\nu) + 3\frac{\eta_2^2}{\eta^2}) \frac{\partial\eta}{\partial n}, & P_{23} &= 3\frac{\eta_2\eta_3}{\eta^2} \frac{\partial\eta}{\partial n} - (1-2\nu) \frac{\eta_2n_3 - \eta_3n_2}{\eta}, \\ P_{31} &= 3\frac{\eta_3\eta_1}{\eta^2} \frac{\partial\eta}{\partial n} - (1-2\nu) \frac{\eta_3n_1 - \eta_1n_3}{\eta}, & P_{32} &= 3\frac{\eta_3\eta_2}{\eta^2} \frac{\partial\eta}{\partial n} - (1-2\nu) \frac{\eta_3n_2 - \eta_2n_3}{\eta}, \end{aligned}$$

$$P_{33} = ((1 - 2\nu) + 3\frac{\eta_3^2}{\eta^2}) \frac{\partial \eta}{\partial n}.$$

Funkcja $J_j(v, w)$ jest jacobianem, natomiast n_1, n_2, n_3 są składowymi wektora normalnego \mathbf{n}_j do segmentu brzegu oznaczonego indeksem j . Jądra (2) i (3) pozwalają na analityczne uwzględnienie w swoim formalizmie matematycznym zamkniętego kształtu brzegu, wykreowanego za pomocą odpowiednich zależności pomiędzy segmentami ($l, j = 1, 2, 3, \dots, n$), które są zdefiniowane we współrzędnych kartezjańskich za pomocą następujących zależności

$$\begin{aligned} \eta_1 &= P_j^{(1)}(v, w) - P_l^{(1)}(v_1, w_1), \quad \eta_2 = P_j^{(2)}(v, w) - P_l^{(2)}(v_1, w_1), \\ \eta_3 &= P_j^{(3)}(v, w) - P_l^{(3)}(v_1, w_1) \quad \text{oraz} \quad \eta = [\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2]^{0.5}, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie $P_j^{(1)}(v, w), P_j^{(2)}(v, w), P_j^{(3)}(v, w)$ są skalarnymi składowymi wektorowego płata powierzchniowego $\mathbf{P}_j(v, w) = [P_j^{(1)}(v, w), P_j^{(2)}(v, w), P_j^{(3)}(v, w)]^T$, zależnego od parametrów v, w . Powyższy zapis jest też słuszny dla płata oznaczonego indeksem l z parametrami v_1, w_1 , tzn. dla $j = l$ oraz dla parametrów $v = v_1$ i $w = w_1$.

W dotychczas rozpatrywanych zagadnieniach przestrzennych za pomocą PURC wektorowe funkcje $\mathbf{P}_j(v, w)$ przyjmowały postać znanych z grafiki komputerowej parametrycznych płatów powierzchni. Możliwość uwzględnienia analitycznego opisu brzegu bezpośrednio w formule PURC jest podstawową zaletą prezentowanego podejścia w porównaniu z tradycyjnymi brzegowymi równaniami całkowymi (BRC). W klasycznych BRC opis brzegu nie jest uwzględniony w formalizmie matematycznym tego równania, lecz zdefiniowany bardzo ogólnie za pomocą całki brzegowej. Powoduje to konieczność podziału brzegu na elementy, jak to ma miejsce w klasycznej MEB. Zalety proponowanego modelowania brzegu, czyli bezpośrednio w równaniach matematycznych (PURC), były pokazywane na zagadnieniach dwuwymiarowych [2,4,5] oraz trójwymiarowych [8,9]. Biorąc pod uwagę dotychczas uzyskaną efektywność modelowania brzegu w PURC za pomocą płatów powierzchni, wydaje się naturalnym przetestowanie analogicznego sposobu modelowania brzegu dla zagadnień modelowanych równaniami Naviera-Lamego. Z uwagi na wstępny charakter badań dla równań Naviera-Lamego ograniczono się wyłącznie do modelowania obszarów wielokątnych. Do ich zamodelowania zastosowano czworokątne płaty powierzchniowe Coonsa. Płaty te charakteryzują się tym, że do ich praktycznego zdefiniowania wymagane jest zadawanie tylko czterech punktów narożnych. Sposób definiowania obszarów trójwymiarowych za pomocą punktów narożnych przedstawiono w zamieszczonych przykładach w podrozdziale 3 na rys.1,2.

2.1. Aproksymacja funkcji brzegowych na płatach powierzchni

Zastosowanie PURC do rozwiązywania zagadnień płaskich oraz przestrzennych pozwoliło na wyeliminowanie konieczności przeprowadzenia dyskretyzacji na poziomie zarówno wspomnianej już deklaracji brzegu, a także funkcji brzegowych. W ramach dotychczasowych prac badawczych funkcje brzegowe zarówno zadawane jako warunki brzegowe, jak również poszukiwane w wyniku rozwiązania PURC przyjmowały postać szeregów aproksymujących z funkcjami bazowymi Czebyszewa [2,4]. W odróżnieniu od zagadnień dwuwymiarowych (modelowanych równaniem Laplace'a) problemy liniowej sprężystości wymagają uwzględnienia funkcji brzegowych w postaci wektorowej. W związku z tym uogólniono wykorzystywane dotychczas szeregi aproksymujące tak, aby

reprezentowały one skalarnie składowe wektora przemieszczeń $\mathbf{u}_j(v, w)$ oraz naprężeń $\mathbf{p}_j(v, w)$. Dla każdego płata powierzchni modelujących segment brzegu j zostały one przedstawione w następującej postaci

$$\mathbf{u}_j(v, w) = \sum_{p=0}^N \sum_{r=0}^M \mathbf{u}_j^{(pr)} T_j^{(p)}(v) T_j^{(r)}(w), \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_j(v, w) = \sum_{p=0}^N \sum_{r=0}^M \mathbf{p}_j^{(pr)} T_j^{(p)}(v) T_j^{(r)}(w), \quad (6)$$

gdzie $\mathbf{u}_j^{(pr)}$, $\mathbf{p}_j^{(pr)}$ są poszukiwanymi współczynnikami, zaś $T_j^{(p)}(v)$, $T_j^{(r)}(w)$ są wielomianami Czebyszewa. Po podstawieniu (5) i (6) do PURC (1) otrzymuje się układ równań algebraicznych względem niewiadomych współczynników, po którego rozwiązaniu otrzyma się współczynniki $\mathbf{u}_j^{(pr)}$ lub $\mathbf{p}_j^{(pr)}$ [8]. Należy mieć na uwadze też to, że zawsze jedno z tych współczynników na poszczególnych segmentach będą otrzymywane w wyniku aproksymacji zadanych warunków brzegowych za pomocą szeregów aproksymujących (5) lub (6).

2.2. Rozwiązania w obszarze

Po rozwiązaniu PURC otrzymano rozwiązanie zagadnienia brzegowego tylko na jego brzegu, reprezentowane w postaci szeregów (5) lub (6). W celu znalezienia rozwiązań w obszarze należało dokonać analitycznej modyfikacji klasycznej tożsamości całkowej znanej dla BRC. Po zastosowaniu modyfikacji analogicznej, jak w przypadku zagadnień dwuwymiarowych [4,7], otrzymano tożsamość całkową, która wykorzystuje rozwiązania na brzegu (5) i (6), otrzymane uprzednio w wyniku rozwiązania PURC. Zmodyfikowana tożsamość całkowa przyjmuje następującą postać

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \int_{v_{j-1}}^{v_j} \int_{w_{j-1}}^{w_j} \left\{ \hat{\mathbf{U}}_j^*(\mathbf{x}, v, w) \mathbf{p}_j(v, w) - \hat{\mathbf{P}}_j^*(\mathbf{x}, v, w) \mathbf{u}_j(v, w) \right\} J_j(v, w) dv dw. \quad (7)$$

Funkcje podcałkowe w tożsamości (7) przedstawiane są w następującej postaci

$$\hat{\mathbf{U}}_j^*(\mathbf{x}, v, w) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu\bar{r}} \begin{bmatrix} \hat{U}_{11} & \hat{U}_{12} & \hat{U}_{13} \\ \hat{U}_{21} & \hat{U}_{22} & \hat{U}_{23} \\ \hat{U}_{31} & \hat{U}_{32} & \hat{U}_{33} \end{bmatrix}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_j^*(\mathbf{x}, v, w) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)\bar{r}^2} \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} & \hat{P}_{13} \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} & \hat{P}_{23} \\ \hat{P}_{31} & \hat{P}_{32} & \hat{P}_{33} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Poszczególne elementy macierzy (8) w jawnej postaci można przedstawić

$$\begin{aligned} \hat{U}_{11} &= (3-4\nu) + \frac{\bar{r}_1^2}{\bar{r}^2}, & \hat{U}_{12} &= \frac{\bar{r}_1\bar{r}_2}{\bar{r}^2}, & \hat{U}_{13} &= \frac{\bar{r}_1\bar{r}_3}{\bar{r}^2}, \\ \hat{U}_{21} &= \frac{\bar{r}_2\bar{r}_1}{\bar{r}^2}, & \hat{U}_{22} &= (3-4\nu) + \frac{\bar{r}_2^2}{\bar{r}^2}, & \hat{U}_{23} &= \frac{\bar{r}_2\bar{r}_3}{\bar{r}^2}, \end{aligned}$$

$$\hat{U}_{31} = \frac{\vec{r}_3 \vec{r}_1}{\vec{r}^2}, \quad \hat{U}_{32} = \frac{\vec{r}_3 \vec{r}_2}{\vec{r}^2}, \quad \hat{U}_{33} = (3 - 4\nu) + \frac{\vec{r}_3^2}{\vec{r}^2},$$

natomiast w macierzy (9) przyjmują następującą postać

$$\begin{aligned} \hat{P}_{11} &= ((1 - 2\nu) + 3 \frac{\vec{r}_1^2}{\vec{r}^2}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial n}, \quad \hat{P}_{12} = 3 \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2}{\vec{r}^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - (1 - 2\nu) \frac{\vec{r}_1 n_2 - \vec{r}_2 n_1}{\vec{r}}, \\ \hat{P}_{13} &= 3 \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_3}{\vec{r}^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - (1 - 2\nu) \frac{\vec{r}_1 n_3 - \vec{r}_3 n_1}{\vec{r}}, \quad \hat{P}_{21} = 3 \frac{\vec{r}_2 \vec{r}_1}{\vec{r}^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - (1 - 2\nu) \frac{\vec{r}_2 n_1 - \vec{r}_1 n_2}{\vec{r}}, \\ \hat{P}_{22} &= ((1 - 2\nu) + 3 \frac{\vec{r}_2^2}{\vec{r}^2}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial n}, \quad \hat{P}_{23} = 3 \frac{\vec{r}_2 \vec{r}_3}{\vec{r}^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - (1 - 2\nu) \frac{\vec{r}_2 n_3 - \vec{r}_3 n_2}{\vec{r}}, \\ \hat{P}_{31} &= 3 \frac{\vec{r}_3 \vec{r}_1}{\vec{r}^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - (1 - 2\nu) \frac{\vec{r}_3 n_1 - \vec{r}_1 n_3}{\vec{r}}, \quad \hat{P}_{32} = 3 \frac{\vec{r}_3 \vec{r}_2}{\vec{r}^2} \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} - (1 - 2\nu) \frac{\vec{r}_3 n_2 - \vec{r}_2 n_3}{\vec{r}}, \\ \hat{P}_{33} &= ((1 - 2\nu) + 3 \frac{\vec{r}_3^2}{\vec{r}^2}) \frac{\partial \vec{r}}{\partial n}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\vec{r}_1 = P_j^{(1)}(v, w) - x_1, \quad \vec{r}_2 = P_j^{(2)}(v, w) - x_2, \quad \vec{r}_3 = P_j^{(3)}(v, w) - x_3, \quad \vec{r} = [\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2 + \vec{r}_3^2]^{0.5}.$$

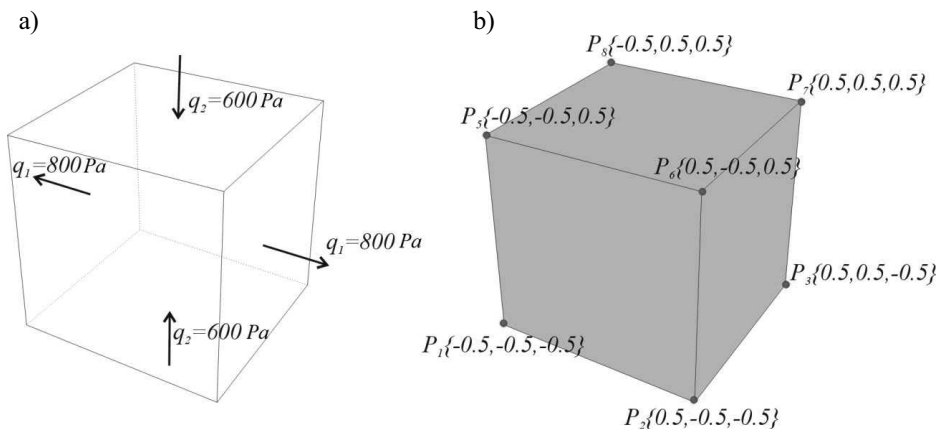
Funkcje podcałkowe w tożsamości całkowej (7) są wizualnie bardzo podobne do funkcji (2,3). Różnica polega na tym, że w funkcjach (8,9) poza płacami powierzchni definiującymi geometrię brzegu występują współrzędne punktów w obszarze $\mathbf{x} \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$, w którym interesuje nas rozwiązanie.

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

W celu praktycznej weryfikacji otrzymanego PURC dla równań Naviera-Lamego oraz tożsamości całkowej opracowano autorski pakiet oprogramowania, pozwalający na rozwiązywanie elementarnych zagadnień z teorii sprężystości. Dopiero napisany i zweryfikowany program dał możliwość przeprowadzenia zamieszczonych w pracy badań testowych. Weryfikacja ta dotyczyła zbadania zgodności uzyskiwanych wyników numerycznych ze znanymi i dostępnymi w literaturze rozwiązaniami analitycznymi.

3.1. Przykład 1

W przykładzie pierwszym rozpatrywano jednostkowy obszar sześcienny o środku umieszczonym w początku układu współrzędnych z przyłożonymi jak na rys. 1a siłami powierzchniowymi. Rozważany obszar sześcienny jak pokazano na rys. 1b został zamodelowany za pomocą jedynie 8 punktów narożnych P_i ($i=1..8$). Zadeklarowane punkty narożne definiowały z kolei sześć czworokątnych płatów powierzchniowych Coonsa.



Rys. 1. Rozpatrywany obszar sześcienny z zadanymi warunkami brzegowymi (a), oraz jego zdefiniowanie za pomocą 8 punktów narożnych (b)

Wartości pola przemieszczeń u_1, u_2, u_3 w wybranych punktach obszaru uzyskane za pomocą tożsamości (7) przy aproksymacji funkcji brzegowych na podstawie $N = M = 3$ wyrazy szeregów aproksymujących (5,6) zostały zamieszczone w tabeli 1. Zostały one zarazem porównane ze znanymi rozwiązaniami analitycznymi [1]

$$u_1 = \frac{(q_1 + \nu q_2)}{E} x_1, \quad u_2 = -\frac{(q_2 + \nu q_1)}{E} x_2, \quad u_3 = -\frac{\nu(q_1 - q_2)}{E} x_3. \quad (10)$$

W obliczeniach przyjęto własności materiałowe ośrodka $E = 100000 Pa$ oraz $\nu = 0.3$.

Tab. 1. Wartości przemieszczeń u_1, u_2, u_3 w wybranych punktach obszaru $\mathbf{x} \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$

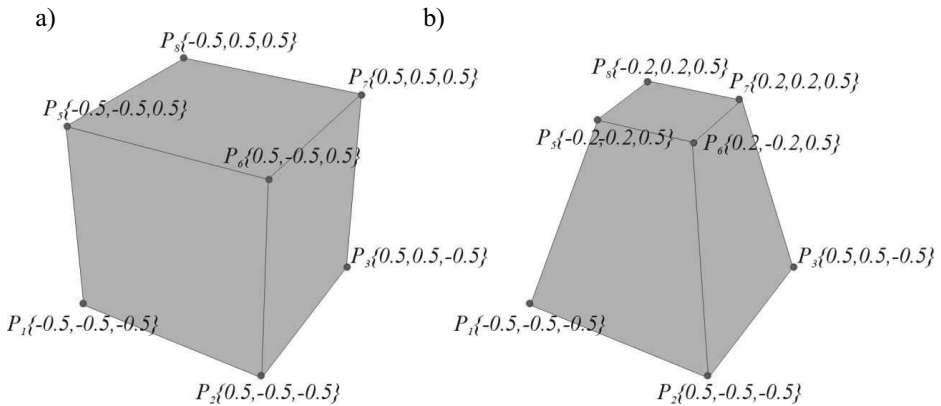
$\mathbf{x} \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$	u_1, u_2, u_3
0.2, -0.4, -0.4	0.00012 (0.04699 %), -0.00391 (0.01907 %), 0.00335 (0.01898 %)
-0.2, -0.4, -0.2	0.00012 (0.04699 %), -0.00391 (0.01907 %), 0.00167 (0.01682 %)
-0.2, -0.4, 0.2	0.00012 (0.04699 %), -0.00391 (0.01907 %), -0.00167 (0.01682 %)
-0.2, -0.4, 0.4	0.00012 (0.04699 %), -0.00391 (0.01907 %), -0.00335 (0.01898 %)

w nawiasach podano błąd względny rozwiązań w porównaniu z rozwiązaniem analitycznym (10)

Jak wynika z tabeli otrzymano wysoką zgodność rozwiązań w odniesieniu do wartości dokładnych (10).

3.2. Przykład 2

W wielu zagadnieniach dotyczących między innymi problemów identyfikacji oraz optymalizacji kształtu obszaru zachodzi konieczność modyfikacji kształtu brzegu. W przypadku przedstawionego sposobu modelowania brzegu w przykładzie 1, taka modyfikacja może być zrealizowana po przesunięciu punktów narożnych P_5, P_6, P_7, P_8 jak pokazano na rys. 2b.

Rys. 2. Modyfikacja sześcianu w PURC po przesunięciu punktów narożnych P_5, P_6, P_7, P_8

Dla przedstawionych na rys. 2 obszarów rozwiązywano równania Naviera-Lamego przy znanych następujących analitycznych rozwiązaniach dla pól przemieszczeń [3]

$$u_1 = \frac{2x_1 + x_2 + x_3}{2}, \quad u_2 = \frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{2}, \quad u_3 = \frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{2}. \quad (11)$$

W tabeli 2 zestawiono uzyskane wartości przemieszczeń odpowiednio dla obszaru z rys. 2a (kolumna 2) oraz z rys. 2b (kolumna 3). Analogicznie jak w przykładzie 1 funkcje brzegowe zostały aproksymowane za pomocą $N = M = 3$ wyrazów szeregów (5,6). W obliczeniach przyjęto $E = 1Pa$ oraz $\nu = 0.25$.

Tab. 2. Rozwiązanie w wybranych punktach przekroju $x_1 = x_2 = 0.0$ dla obszarów z rys. 2a,b

Punkty w przekroju $x \equiv \{x_1, x_2, x_3\}$	Błąd względny rozwiązań numerycznych $ \xi , \%$ w porównaniu z (11)	
	Rys. 2a	Rys. 2b
0.0, 0.0, -0.4	3.26866e-006	3.26874e-006
	3.26862e-006	3.26872e-006
	5.83691e-006	5.83676e-006
0.0, 0.0, -0.1	8.22717e-009	8.81373e-009
	8.28200e-009	8.61611e-009
	8.41739e-009	9.06646e-009
0.0, 0.0, 0.1	8.38825e-009	1.23444e-008
	8.39449e-009	1.25184e-008
	8.31177e-009	8.66116e-009
0.0, 0.0, 0.4	3.26862e-006	6.17370e-009
	3.26861e-006	6.18877e-009
	5.83688e-006	6.20444e-009

Analogicznie, jak w przykładzie pierwszym, uzyskano wysoką dokładność rozwiązań numerycznych dla obydwu obszarów z rys. 2a i b.

4. WNIOSKI

Przeprowadzona analiza wykazała dotychczasowe zalety PURC także w odniesieniu do zagadnień liniowo sprężystych. Zalety te związane są z prostotą definiowania i modyfikacji kształtu brzegu na podstawie deklaracji punktów narożnych. Zamieszczone przykłady numeryczne wskazują na dużą dokładność uzyskanych rozwiązań.

LITERATURA

1. Liu D.S., Chiou D.Y., Lin C.H.: 3D IEM formulation with an IEM/FEM coupling scheme for solving elastostatic problems. „Advances in Engineering Software” 2003, 34, p. 309–320.
2. Szczebiot R., Zieniuk E.: Modelowanie i symulacja potencjalnych zagadnień brzegowych z wielokątnymi podobszarami o różnych właściwościach. W: PTSK “Symulacja w badaniach i rozwoju”. Koszalin 2003, s. 255-260.
3. Zhang J., Yao Z.: The regular hybrid boundary node method for three-dimensional linear elasticity. “Engineering Analysis with Boundary Elements” 2004, 28, p. 525–534.
4. Zieniuk E.: Bézier curves in the modification of boundary integral equations (BIE) for potential boundary-values problems. “International Journal of Solids and Structures” 2003, 40, p. 2301-2320.
5. Zieniuk E., Bołtuć A.: Bézier curves in the modeling of boundary geometries for 2D boundary problems defined by Helmholtz equation. “Journal of Computational Acoustics” 2006, 14, p. 1-15.
6. Zieniuk E., Szerszeń K., Bołtuć A.: Globalne obliczanie całek po obszarze w PURC dla dwuwymiarowych zagadnień brzegowych modelowanych równaniem Naviera-Lamego i Poissona. „Modelowanie Inżynierskie” 2007, nr 33, t. 2, s. 181-186.
7. Zieniuk E., Bołtuć A.: Non-element method of solving 2D boundary problems defined on polygonal domains modeled by Navier equation. “International Journal of Solids and Structures” 2006, 43, p. 7939-7958.
8. Zieniuk E., Szerszeń K.: Liniowe płyty powierzchniowe Coonsa w modelowaniu wielokątnych obszarów w trójwymiarowych zagadnieniach brzegowych definiowanych równaniem Laplace’a. „Archiwum Informatyki Teoretycznej i Stosowanej” 2005, 2,17, s. 127-142.
9. Zieniuk E., Szerszeń K.: Triangular Bézier patches in modelling smooth boundary surface in exterior Helmholtz problems solved by PIES. “Archives of Acoustics” 2009, 1, 34, p. 1-11.

PIES FOR SOLVING THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS MODELED BY NAVIER-LAME EQUATION IN POLYGONAL DOMAINS

Summary. The aim of this paper is to present an overview of the potential application of parametric integral equation system (PIES) for solving boundary value problems described by Navier-Lame equation on 3D polygonal domains. The efficiency and performance of the proposed approach is examined in two numerical examples.

Praca finansowana ze środków na naukę w latach 2010-2013 jako projekt badawczy.