

## PRZEDZIAŁOWE MODELOWANIE ZAGADNIENÍ STACJONARNEGO PRZEPIYU CIEPIA

EUGENIUSZ ZIENIUK, ANDRZEJ KUZELEWSKI

*Instytut Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku  
e-mail: ezieniuk@ii.uwb.edu.pl, akuzel@ii.uwb.edu.pl*

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono praktyczne wykorzystanie przedziałowego parametrycznego układu równań całkowych (PURC) w modelowaniu i symulacji nieprecyzyjnie zdefiniowanych zagadnień stacjonarnego przepływu ciepła. Przedziałowy PURC uwzględnia bezpośrednio w swoim formalizmie możliwość nieprecyzyjnego definiowania zarówno kształtu brzegu, jak i warunków brzegowych. Efektywność zaproponowanej metody potwierdzają załączone przykłady praktyczne.

### 1. WSTĘP

Rzeczywiste zjawiska fizyczne mogą być badane eksperymentalnie lub z wykorzystaniem metod teoretycznych (zarówno analitycznych, jak i numerycznych). Znaczącą wadą metod doświadczalnych jest ich koszt oraz praco- i czasochłonność. Modelowanie teoretyczne wiąże się bezpośrednio z odpowiednim sformułowaniem matematycznego opisu zjawiska fizycznego i rozwiązaniem tak postawionego problemu. Niestety, w wielu przypadkach rozwiązanie analityczne jest trudne lub nawet niemożliwe do uzyskania. Zrozumiałe więc jest duże zainteresowanie badaczy rozwojem alternatywnych metod modelowania, a w szczególności metod numerycznych, które zyskały na popularności wraz z gwałtownym postępowaniem w dziedzinie techniki komputerowej.

Najpopularniejsze obecnie techniki numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych modelowanych równaniami różniczkowymi (całkowymi) polegają na podziale obszaru lub brzegu obszaru rozwiązywanego zagadnienia na niewielkie części (tzw. elementy), na których definiowane są pewne funkcje interpolujące. Powyższy schemat wykorzystany jest w metodzie elementów skończonych (MES) [16] i metodzie elementów brzegowych (MEB) [2]. Metody te nie uwzględniają jednakże możliwości nieprecyzyjnego opisu zagadnienia. Niemożliwe jest ich bezpośrednie wykorzystanie do rozwiązywania zagadnień zdefiniowanych w sposób nieprecyzyjny ze względu na brak możliwości opisanie takich zagadnień za pomocą tradycyjnego aparatu matematycznego.

W ostatnich latach pojawia się coraz więcej opracowań wykorzystujących nieprecyzyjność oraz niepewność w modelowaniu zagadnień brzegowych. Dlatego też w modelowaniu tym są stosowane: liczby przedziałowe, arytmetyka przedziałowa [5], teoria zbiorów rozmytych [10]. W przypadku klasycznych metod elementowych pojawiły się ich przedziałowe rozwinięcia w postaci tzw. przedziałowej metody elementów skończonych [7] i przedziałowej metody elementów brzegowych [1]. Jednakże metody te dziedziczą wady metod klasycznych stosowanych do rozwiązywania zagadnień precyzyjnych, które zdecydowanie negatywnie

wpływają na ich efektywność w praktycznych zastosowaniach. Dużym problemem jest uwzględnienie nieprecyzyjnie zdefiniowanego kształtu brzegu ze względu na fakt dyskretnego podziału obszaru lub brzegu zagadnienia.

Równolegle powstają się także nowe techniki modelowania zagadnień brzegowych, których celem jest wyeliminowanie wad wspomnianych wyżej metod. Należy do nich intensywnie rozwijany parametryczny układ równań całkowych (PURC) [12,13]. PURC charakteryzuje się tym, że w przeciwieństwie do tradycyjnego brzegowego równania całkowego (BRC) nastąpiło w nim rozdzielenie aproksymacji kształtu brzegu od funkcji brzegowych. Modelowanie kształtu brzegu w PURC odbywa się w sposób ciągły dzięki wykorzystaniu krzywych stosowanych w grafice komputerowej [6], dlatego też nie zachodzi proces dyskretyzacji jaki jest stosowany w metodach tradycyjnych.

W celu uwzględnienia nieprecyzyjności w modelowaniu zagadnień brzegowych opracowany został przedziałowy parametryczny układ równań całkowych [11]. Jest on uogólnieniem PURC dziedziczącym jego zalety i efektywność. Dane wejściowe w przedziałowym PURC zadawane są za pomocą liczb przedziałowych, dzięki temu można w prosty i efektywny sposób uwzględnić nieprecyzyjność modelowanego zagadnienia.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie możliwości zastosowania przedziałowego PURC i jego efektywności w rozwiązywaniu zagadnień brzegowych zdefiniowanych w sposób przedziałowy. Możliwości i wiarygodność proponowanej strategii przetestowano na przykładach dotyczących modelowania stacjonarnego przepływu ciepła definiowanych równaniem Laplace'a.

## 2. PRZEDZIAŁOWY PURC

### 2.1. Definiowanie kształtu brzegu i warunków brzegowych

Istotą modelowania kształtu brzegu w przedziałowym PURC jest zastosowanie parametrycznych krzywych wykorzystywanych w grafice komputerowej, a przede wszystkim przedziałowych krzywych Béziera dowolnego stopnia [9]:

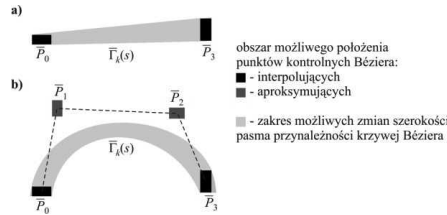
$$\bar{\Gamma}_k(s) = \sum_{i=0}^n \bar{\mathbf{P}}_i B_{i,n}(s), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (1)$$

gdzie:  $\bar{\mathbf{P}}_i$  – przedziałowy punkt kontrolny,  $n$  – stopień krzywej,  $B_{i,n}$  – funkcje bazowe Bernsteina [13]  $n$ -tego stopnia:

$$B_{i,n}(s) = \binom{n}{i} (1-s)^{n-i} s^i. \quad (2)$$

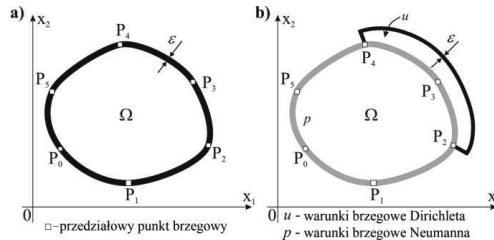
Przedziałowa krzywa Béziera różni się od klasycznej tym, że współrzędne jej punktów kontrolnych zdefiniowane są za pomocą przedziałów. Jest to jednoznaczne z definiowaniem na płaszczyźnie przedziałowych punktów kontrolnych Béziera w postaci prostokątów (rys. 1).

W przedziałowym PURC zwykle wykorzystywane są dwa typy krzywych Béziera: pierwszego lub trzeciego stopnia (rys. 1). Przedziałowa krzywa pierwszego stopnia jest parametryczną funkcją liniową i służy do definiowania wielokątnych kształtów brzegu. Jest ona kreowana za pomocą dwóch przedziałowych punktów interpolujących Béziera, które podobnie jak w nieprzedziałowym PURC, nazywane są punktami narożnymi.



Rys.1. Przedziałowa krzywa Béziera a) pierwszego stopnia, b) trzeciego stopnia

Do definiowania nieprecyzyjnie zdefiniowanego kształtu brzegu wykorzystywane są przedziałowe krzywe Béziera trzeciego stopnia. Za ich pomocą można efektywnie przybliżyć kształt dowolnego brzegu. Brzeg jest krzywą zamkniętą i w punktach łączenia kubicznych segmentów może być łatwo zapewniona ciągłość klasy  $C^2$ . Dzięki temu kształt gładkiego brzegu można zdefiniować, wykorzystując tylko interpolujące punkty brzegowe Béziera – punkty aproksymujące obliczane są automatycznie [6,13]. Takie modelowanie tylko za pomocą przedziałowych punktów interpolujących Béziera pokazane zostało na rys. 2. Wielkość  $\varepsilon$  oznacza szerokość pasma, w którym znajduje się rzeczywista geometria brzegu (wartość warunków brzegowych).



Rys.2. Definiowanie a) kształtu brzegu, b) przedziałowych warunków brzegowych

Nieprecyzyjnie zdefiniowane warunki brzegowe są przybliżane szeregami aproksymującymi przedstawionymi w następującej postaci [11]:

$$\hat{p}_j(s) = \sum_{k=0}^M \hat{p}_j^{(k)} T_j^{(k)}(s), \quad \hat{u}_j(s) = \sum_{k=0}^M \hat{u}_j^{(k)} T_j^{(k)}(s), \quad (3)$$

gdzie:  $\hat{p}_j^{(k)} = [p^-, p^+]_j^{(k)}$ ,  $\hat{u}_j^{(k)} = [u^-, u^+]_j^{(k)}$  – są przedziałowymi współczynnikami które mogą być zadanymi lub niewiadomymi,  $M$  – jest liczbą współczynników na segmencie,  $T_j^{(k)}(s)$  – są globalnymi funkcjami bazowymi na poszczególnych segmentach - wielomiany Czebyszewa.

## 2.2. Rozwiązanie przedziałowego PURC

Rozwiązanie zagadnienia na brzegu można uzyskać, rozwiązując przedziałowy PURC przedstawiany następującym wzorem [11]:

$$\frac{1}{2} \hat{u}_l(s_1) = \sum_{j=1}^n \int_{\bar{s}_{j-1}}^{\bar{s}_j} \{ \bar{U}_{lj}^*(s_1, s) \hat{p}_j(s) - \bar{P}_{lj}^*(s_1, s) \hat{u}_j(s) \} J_j(s) ds, \quad (4)$$

$$l = 1, 2, \dots, n, \quad \bar{s}_{l-1} \leq s_1 \leq \bar{s}_l, \quad \bar{s}_{j-1} \leq s \leq \bar{s}_j,$$

gdzie:  $\hat{u}_l(s_1)$ ,  $\hat{u}_j(s)$ ,  $\hat{p}_j(s)$  są przedziałowymi funkcjami o wartościach przedziałowych,  $n$  – jest liczbą segmentów modelujących brzeg.

W równaniu tym funkcje podcałkowe (jądra) są przedstawiane za pomocą

$$\bar{U}_j^*(s_1, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{\eta}}, \quad \bar{P}_j^*(s_1, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{\eta}_1 n_1^{(j)}(s) + \bar{\eta}_2 n_2^{(j)}(s)}{\bar{\eta}^2}, \quad (5)$$

gdzie:  $\bar{\eta} = \sqrt{\bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2}$ ,  $\bar{\eta}_1 = \bar{\Gamma}_i^{(1)}(s_1) - \bar{\Gamma}_j^{(1)}(s)$ ,  $\bar{\eta}_2 = \bar{\Gamma}_i^{(2)}(s_1) - \bar{\Gamma}_j^{(2)}(s)$ ,  $\bar{\Gamma}_i = [\bar{\Gamma}_i^{(1)}, \bar{\Gamma}_i^{(2)}]^T$  ( $i = j, l$ ) – krzywe zdefiniowane równaniem (1).

Wyrażenia (5) w nawiązaniu do [13] możemy zdefiniować jako przedziałowe brzegowe rozwiązanie podstawowe i przedziałowe brzegowe rozwiązanie osobliwe.

W trakcie numerycznego rozwiązywania przedziałowego PURC (4) uzyskano liniowy przedziałowy układ równań algebraicznych. Do rozwiązania takiego układu mogą być stosowane różne metody, szerzej opisane w literaturze [8]. Zastosowanie klasycznej arytmetyki przedziałowej prowadziło jednak do uzyskania bardzo szerokich przedziałów, przez co stawały się one bezużyteczne z praktycznego punktu widzenia. Skutecznym rozwiązaniem problemu okazało się połączenie przedziałowej eliminacji Gaussa z zaproponowaną w pracy [4] skierowaną arytmetyką przedziałową i charakterystycznymi dla niej operacjami arytmetycznymi. Skierowana arytmetyka przedziałowa pozwala na uzyskanie elementu zerowego przy odejmowaniu i jedynki przy dzieleniu, które to są nieosiągalne dla standardowej arytmetyki przedziałowej, a mają duży wpływ na dokładność rozwiązań. Bardziej szczegółowy opis zagadnienia można odnaleźć w pracy [15].

### 2.3. Rozwiązania przedziałowe na brzegu i w obszarze

Rozwiązanie przedziałowego układu równań algebraicznych, który jest aproksymacją przedziałowego PURC, pozwala na wyznaczenie przedziałowych rozwiązań  $\hat{x}_j^{(k)} = [x^-, x^+]_j^{(k)}$ . Rozwiązania te są przedziałowymi współczynnikami w szeregach aproksymujących opisanych równaniami (3). Ogólnie szeregi te (dla dowolnego zagadnienia brzegowego) mogą być przedstawione w następującej postaci:

$$\hat{t}_j(s) = \sum_{k=0}^M \bar{x}_j^{(k)} T_j^{(k)}(s), \quad \hat{t}_j(s) \in \{\hat{u}_j(s), \hat{p}_j(s)\}, \quad (6)$$

gdzie:  $M$  – jest liczbą współczynników na segmencie  $j$ ,  $T_j^{(k)}(s)$  – są globalnymi funkcjami bazowymi na segmencie  $j$  (wielomiany Czebyszewa).

Mając jawną postać wielomianu aproksymującego funkcje brzegowe (6), można obliczyć wielkości poszukiwane w dowolnym jego punkcie na brzegu. W przypadku PURC i przedziałowego PURC dokładność rozwiązania zależy przede wszystkim od liczby wyrazów w szeregu aproksymującym (6) oraz sposobu rozmieszczenia punktów kolokacji [14]. Okazuje się, że już nawet przy niewielkiej liczbie współczynników  $M$  w (6), uzyskiwana jest wysoka dokładność rozwiązań.

W przypadku przedziałowego PURC tożsamość całkowita dla rozwiązań w obszarze jest specjalnie dostosowana do jego formalizmu matematycznego i ma ona następującą postać [11]:

$$\bar{u}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \int_{\bar{s}_{j-1}}^{\bar{s}_j} \left( \hat{U}_j^*(\bar{x}, s) \hat{p}_j(s) - \hat{P}_j^*(\bar{x}, s) \hat{u}_j(s) \right) J_j(s) ds. \quad (7)$$

Jądra  $\hat{U}_j^*$ ,  $\hat{P}_j^*$  przedstawiane są następującymi wyrażeniami:

$$\hat{U}_j^*(\bar{\mathbf{x}}, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2}}, \quad \hat{P}_j^*(\bar{\mathbf{x}}, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{r}_1 \bar{n}_1^{(j)} + \bar{r}_2 \bar{n}_2^{(j)}}{\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2}, \quad (8)$$

gdzie:  $\bar{r}_1 = \bar{x}_1 - \bar{\Gamma}_j^{(1)}(s)$  i  $\bar{r}_2 = \bar{x}_2 - \bar{\Gamma}_j^{(2)}(s)$ .

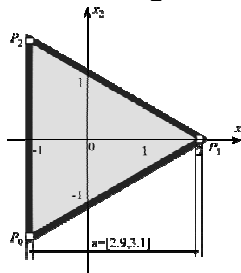
Wyrażenia (8) są nazywane odpowiednio przedziałowym rozwiązaniem podstawowym w obszarze i przedziałowym rozwiązaniem osobliwym w obszarze [11].

### 3. WERYFIKACJA ALGORYTMU I PRZEDZIAŁOWEGO MODELOWANIA

#### 3.1. Testowanie wiarygodności algorytmu

W celu przetestowania wiarygodności algorytmu wykorzystano równanie Laplace’a ze znanym rozwiązaniem analitycznym (9), do którego rozwiązania zastosowano przedziałowy PURC. Rozpatrzono nieprecyzyjnie zdefiniowany obszar o kształcie trójkąta równobocznego, jak pokazano na rys.3, z warunkami brzegowymi Dirichleta:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}. \quad (9)$$



Rys.3. Przedziałowe modelowanie obszaru zdefiniowane w sposób nieprecyzyjny.

Poszukiwana jest wartość  $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$  w różnych punktach przekroju uzyskana w wyniku zastosowania przedziałowego PURC. Analityczne rozwiązanie  $\varphi(\mathbf{x})$  uzyskane jest za pomocą wzoru:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{x_1^3 - 3x_1x_2^2}{2a} + \frac{2a^2}{27}, \quad (10)$$

w którym przez bezpośrednio podstawiono przedziałowe wartości  $x_1, x_2$  i wykorzystano w trakcie działań arytmetycznych skierowaną arytmetykę przedziałową. Uzyskane wyniki zestawiono w tabeli 1.

Porównując wyniki uzyskane za pomocą przedziałowego PURC z rozwiązaniami analitycznymi widać, że są one do siebie zbliżone.

#### 3.2. Przedziałowe modelowanie stacjonarnego przepływu ciepła w piecu

Poszukiwany jest współczynnik przenikania ciepła na jednostkę długości  $q'_{out}$  nieprecyzyjnie zdefiniowanego pieca zbudowanego z cegły ogniotrwalej o przedziałowej przewodności cieplnej  $k = [1.1, 1.3]$  W/K·m, przedziałowych wymiarach zewnętrznych  $[2.495, 2.505] \times [2.495, 2.505]$  m i wewnętrznych  $[1.495, 1.505] \times [1.495, 1.505]$  m. Przedziałowo zdefiniowany przekrój poprzeczny pieca przedstawiono na rys. 4a. Temperatura wewnątrz

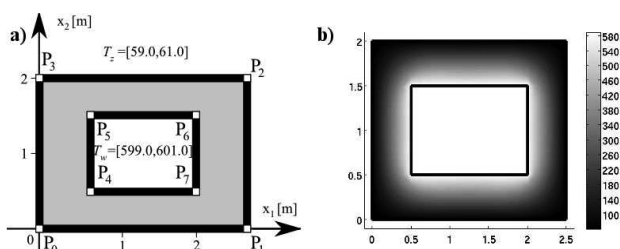
pieca ma wartość przedziałową  $T_w = [599.0, 601.0]$  °C, zaś na zewnątrz  $T_z = [59.0, 61.0]$  °C. Długość pieca jest dużo większa od jego wymiarów poprzecznych. Należy wyznaczyć także rozkład temperatury wewnątrz ścian pieca.

Tabela 1. Wartości funkcji  $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$  w różnych punktach przekroju trójkątnego

$x_1$	$x_2$	$\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ – przedziałowy PURC	$\varphi(\mathbf{x})$ - analityczne
[-0.55,-0.45]	[-0.05,0.05]	[0.584,0.704]	[0.616,0.674]
[-0.05,0.05]	[-0.05,0.05]	[0.625,0.709]	[0.645,0.689]
[0.45,0.55]	[-0.05,0.05]	[0.646,0.728]	[0.659,0.717]
[0.95,1.05]	[-0.05,0.05]	[0.780,0.886]	[0.788,0.880]
[1.45,1.55]	[-0.05,0.05]	[1.154,1.304]	[1.159,1.301]
[-0.55,-0.45]	[0.45,0.55]	[0.643,0.773]	[0.673,0.743]
[-0.05,0.05]	[0.45,0.55]	[0.622,0.714]	[0.637,0.697]
[0.45,0.55]	[0.45,0.55]	[0.579,0.673]	[0.588,0.662]
[-0.55,-0.45]	[0.95,1.05]	[0.818,0.978]	[0.836,0.960]
[-0.30,-0.20]	[0.95,1.05]	[0.723,0.859]	[0.735,0.847]

W wyniku rozwiązania zadania za pomocą przedziałowego PURC uzyskano przedziałowy współczynnik przenikania ciepła o wartości  $[7.113, 8.803]$  kW/m. Metoda wykorzystująca wykres przepływu (z ang. *flux plot*), bliżej przedstawiona w [3], zastosowana dla środkowych wartości warunków brzegowych i kształtu brzegu daje zbliżony rezultat równy 7.88 kW/m.

Rozkład temperatury wewnątrz ścian pieca dla środkowych wartości rozwiązań uzyskanych we wnętrzu przedstawiono na rys. 4b.



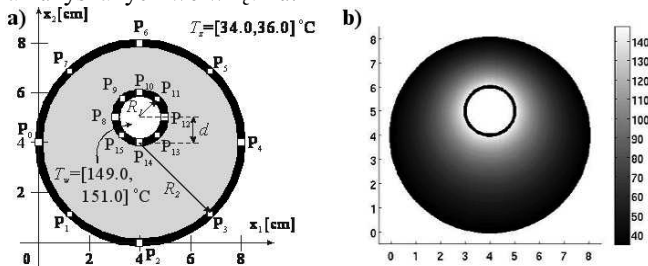
Rys. 4. a) Przekrój poprzeczny nieprecyzyjnie zdefiniowanego pieca z cegły ogniotrwałej, b) rozkład temperatury wewnątrz ścian pieca

Pomimo uzyskania zbliżonych wartości poszukiwanego współczynnika przenikania ciepła należy pamiętać, że metoda przedstawiona w pracy [3] jest metodą przybliżoną i wiąże się z wykorzystaniem wykresu przepływu oraz przybliżonego na jego podstawie współczynnika kształtu. Może to powodować uzyskiwanie wyników obciążonych dużym błędem. W przypadku przedziałowego PURC wcześniejsze badania wykazały, że jest on bardzo dokładny i uzyskiwane rezultaty są zbliżone do rozwiązań analitycznych. Dlatego wydaje się, że współczynnik przenikania ciepła uzyskany za pomocą przedziałowego PURC jest bliższy wartości prawidłowej niż uzyskany w wyniku obliczeń przedstawionych w [3].

### 3.3. Przedziałowa symulacja stacjonarnego przepływu ciepła w rurze

W drugim przykładzie poszukiwany jest współczynnik przenikania ciepła na jednostkę długości  $q_{out}$  nieprecyzyjnie zdefiniowanej gorącej rury o promieniu  $R_1 = [0.95, 1.05]$  cm osadzonej niewspółosiowo wewnątrz izolacji o promieniu  $R_2 = [3.95, 4.05]$  cm przedstawionej na rys. 5a. Temperatura wewnątrz rury ma wartość  $T_w = [149.0, 151.0]$  °C, zaś na zewnątrz  $T_z = [34.0, 36.0]$  °C. Przesunięcie pomiędzy środkami rury i izolacji wynosi  $d = [0.95, 1.05]$  cm. Współczynnik przewodzenia ciepła izolacji wokół rury  $k = [0.4, 0.6]$  W/K·m. Długość rury jest dużo większa od jej średnicy. Należy także wyznaczyć rozkład temperatury wewnątrz izolacji.

W wyniku rozwiązania zadania za pomocą przedziałowego PURC uzyskano przedziałowy współczynnik przenikania ciepła o wartości  $[202.98, 352.68]$  W/m, podczas gdy metoda przedstawiona w [3] dla środkowych wartości warunków brzegowych i kształtu brzegu daje rezultat 245 W/m. Na rys. 5b przedstawiono rozkład temperatury w izolacji dla środkowych wartości rozwiązań uzyskanych we wnętrzu.



Rys. 5. a) Przekrój poprzeczny rury osadzonej asymetrycznie w izolacji, b) rozkład temperatury wewnątrz izolacji

Zastosowanie przedziałowego PURC pozwala już na etapie projektowania w sposób efektywny przewidzieć przedziałowe straty ciepła w układzie. Dodatkowo uwzględnione mogą być oczywiście błędy w wykonaniu rzeczywistego układu (np. niedokładności w wykonaniu izolacji – zbyt duża lub zbyt mała jej średnica). Można także włączyć do obliczeń brak precyzji w zdefiniowaniu współczynnika przewodzenia ciepła samej izolacji.

## 4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono możliwość zastosowania przedziałowego PURC w modelowaniu i symulacji nieprecyzyjnie zdefiniowanych praktycznych zagadnień stacjonarnego przepływu ciepła. Wykorzystanie przedziałowego PURC pozwala na uwzględnienie nieprecyzyjnego zdefiniowania kształtu geometrii brzegu i warunków brzegowych modelowanych zagadnień brzegowych.

W porównaniu z tradycyjnymi metodami przedziałowy PURC jest bardzo efektywny, nie wymaga przeprowadzania klasycznej dyskretyzacji brzegu i obszaru. Zarówno na brzegu jak i w obszarze rozwiązania uzyskiwane są w postaci szeregu aproksymującego, czyli w sposób ciągły. Zastosowanie arytmetyki przedziałowej pozwoliło na uzyskanie wyników w postaci liczb przedziałowych. Uwzględniają one nieprecyzyjny charakter danych definiujących rozwiązywane zagadnienie.

Zamieszczone przykłady potwierdzają możliwość zastosowania metody w praktycznych problemach związanych z modelowaniem zagadnień stacjonarnego przepływu ciepła opisywanych równaniem Laplace'a.

## LITERATURA

1. Burczyński T., Skrzypczyk J.: Fuzzy aspects of the boundary element method. "Engineering Analysis with Boundary Elements" 1997, Vol. 19, p. 209-216.
2. Burczyński T.: Metoda elementów brzegowych. Warszawa: WNT, 1995.
3. Incropera F. P., DeWitt D. P.: Fundamentals of heat and mass transfer. New York: Wiley, 2002.
4. Markov S. M.: Extended interval arithmetic involving infinite intervals. "Mathematica Balkanica", New Series, 1992, Vol. 6, p. 269-304.
5. Moore R. E.: Interval analysis. Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall, 1966.
6. Mortenson M.: Geometric modelling. Chichester: John Wiley and Sons, 1985.
7. Muhanna R. L., Mullen R. L.: Development of of interval based methods for fuzziness in continuum mechanics. In: Proceedings of ISUMA-NAFIPS'95, 1995, p. 23-45.
8. Neumaier A.: Interval methods for system of equations. Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney: Cambridge University Press, 1990.
9. Sederberg T. W., Farouki R. T.: Approximated by interval Bézier curves. "IEEE Computer Graphics and its Application" 1992, Vol. 15, p. 87-95.
10. Zadeh L. A.: Fuzzy sets. "Information and Control" 1965, 8, p. 338-353.
11. Zieniuk E.: Nowa koncepcja rozwiązywania rozmytych zagadnień brzegowych. W: Materiały konferencji naukowej „Informatyka teoretyczna. Metody analizy informacji niekompletnej i rozproszonej”. Politechnika Białostocka, X lat Instytutu Informatyki, Białystok, 2000, s. 182-192.
12. Zieniuk E.: Potential problems with polygonal boundaries by a BEM with parametric linear functions. "Engineering Analysis with Boundary Elements" 2001, 25, p. 185-190.
13. Zieniuk E.: Bézier curves in the modification of boundary integral equations (BIE) for potential boundary-values problems. "International Journal of Solids and Structures" 2003, 40, p. 2301-2320.
14. Zieniuk E., Bołtuć A., Szerszeń K.: Numeryczne rozwiązywanie metodą kolokacji Czebyszewa parametrycznego układu równań całkowych (PURC) zastosowanego dla równania Laplace'a z warunkami brzegowymi Dirichleta na wielokątnych obszarach. „Archiwum Informatyki Teoretycznej i Stosowanej” 2004, 16, s. 17-31.
15. Zieniuk E., Kuźelewski A.: Fuzzy parametric integral equations system in modelling of polygonal potential boundary problems described by the Laplace equation. In: Information Processing and Security Systems. Springer: New York, 2005, p.317-326.
16. Zienkiewicz O.C.: The finite element methods. London: McGraw-Hill, 1977.

## INTERVAL MODELLING OF STEADY-STATE HEAT TRANSFER PROBLEMS

Summary. The paper presents possibility of application of the interval parametric integral equation system (IPIES) to modelling and simulation imprecisely defined steady-state heat transfer problems. The possibility of imprecise definition either boundary geometry or boundary conditions is considering in IPIES formalism. The effectiveness of proposed method is confirmed by included practical examples.