

## NIELINIOWA SKŁADOWA CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH KOLUMNY PODDANEJ OBCIĄŻENIU EULERA (PROSTOLINIOWA POSTAĆ RÓWNOWAGI STATYCZNEJ)

SEBASTIAN UZNY

*Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Częstochowska  
e-mail: uzny@imipkm.pcz.czyst.pl*

Streszczenie. W pracy sformułowano i rozwiązano zagadnienie brzegowe dotyczące drgań własnych smukłego układu geometrycznie nieliniowego poddanego działaniu ściskającej siły zewnętrznej Eulera. Ze względu na nieliniowość wykorzystano metodę małego parametru. Rozważaniom poddano prostoliniową postać równowagi statycznej. Na podstawie zagadnienia brzegowego przeprowadzono obliczenia numeryczne dotyczące liniowej i nieliniowej składowej częstości drgań własnych. Obliczenia numeryczne wykonano przy różnych wartościach parametrów układu.

### 1. WSTĘP

Smukłe układy geometrycznie nieliniowe to takie, w których do sformułowania zagadnienia brzegowego wykorzystuje się nieliniową teorię umiarkowanie dużych ugięć. Według teorii umiarkowanie dużych ugięć odkształcenie  $i$ -tego elementu układu definiuje się następującą zależnością (por. [1, 4-10]):

$$\varepsilon_i(x,t) = \frac{\partial U_i(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W_i(x,t)}{\partial x} \right)^2 \quad (1)$$

We wzorze (1)  $U_i(x,t)$  oraz  $W_i(x,t)$  – odpowiednio przemieszczenie wzdłużne i poprzeczne poszczególnych elementów układu.

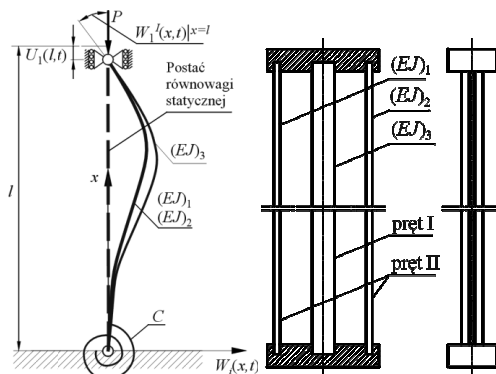
Układy geometrycznie nieliniowe charakteryzują się prostoliniową i krzywoliniową postacią równowagi statycznej (por. [5, 10]) oraz lokalną i globalną niestatecznością (por. [9, 10]). Prostoliniowa postać równowagi statycznej odpowiada obciążeniu zewnętrznemu z zakresu od zera do obciążenia bifurkacyjnego. Zagadnienie statyczne w tym zakresie obciążenia zostało zaprezentowane przez L. Tomskiego w pracy [7]. Przy obciążeniu bifurkacyjnym następuje zamiana prostoliniowej postaci równowagi statycznej układu na postać krzywoliniową. Autorzy prac związanych z układami smukłymi często przedstawiają wyniki badań na płaszczyźnie obciążenie - częstość drgań własnych (por. [2, 5, 6, 8-10]). W przypadku rozważania układów nieliniowych częstość drgań własnych rozwijana jest w szereg potęgowy małego parametru (częstość drgań własnych składa się z kolejnych składowych częstości). Pierwsza składowa częstości drgań jest niezależna od amplitudy drgań i jest składową liniową. Pozostałe składowe częstości są składowymi nieliniowymi zależnymi od amplitudy drgań własnych. Pierwszą nieliniową składową częstości drgań własnych w przypadku prostoliniowej postaci równowagi statycznej wyznaczyli przy obciążeniu Eulera

Tomski i Przybylski [6] oraz Tomski et al. [8] oraz przy obciążeniu niekonserwatywnym (uogólnionym Becka i Reuta) Przybylski [5]. Autorzy tych prac wyznaczyli pierwszą nieliniową składową częstości drgań własnych przy wybranych parametrach układu, nie badając szczegółowo jak wartość tej składowej zależy od parametrów układu, w tym od współczynnika asymetrii sztywności na zginanie.

Celem niniejszej pracy są szczegółowe badania dotyczące różnic pomiędzy częstością uwzględniającą tylko liniową składową a częstością uwzględniającą zarówno liniową jak i nieliniową składową. W badaniach uwzględniono wpływ poszczególnych parametrów charakteryzujących układ na obliczane częstości.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Schemat rozważanego układu przedstawiono na rys. 1. Układ zbudowany jest jako płaska rama składająca się z trzech prętów symetrycznie rozmieszczonych względem osi układu. W niniejszej pracy uwzględnia się jedynie prostoliniową postać równowagi statycznej (postać równowagi statycznej zaznaczona jest na rysunku linią przerywaną). Układ jest sprężyste zamocowany przy  $x = 0$  ( $C$  jest sztywnością zamocowania) oraz przegubowo zamocowany przy  $x = l$ . Kolumna poddana jest ściskającej sile zewnętrznej Eulera  $P$  (sile nie zmieniającej kierunku działania).



Rys. 1. Schemat rozważanego układu w przypadku prostoliniowej postaci równowagi statycznej

W niniejszej pracy rozważania przeprowadzono, uwzględniając wielkości bezwymiarowe:

$$\xi = \frac{x}{l}, w_i(\xi, \tau) = \frac{W_i(x, \tau)}{l}, u_i(\xi, \tau) = \frac{U_i(x, \tau)}{l}, k_i^2(\tau) = \frac{S_i(\tau)l^2}{(EJ)_i} \quad (2a-d)$$

$$\Omega_i^2 = \frac{(\rho_0 A)_i \omega^2 l^4}{(EJ)_i}, \tau = \omega t, \Theta_i = \frac{A_i l^2}{J_i} \quad (2e-g)$$

We wzorach (2)  $W_i(x, t)$  i  $U_i(x, t)$  – odpowiednio przemieszczenie poprzeczne i wzdłużne  $i$ -tego pręta,  $\omega$  – częstość drgań własnych,  $S_i(\tau)$  – siła wewnętrzna w  $i$ -tym pręcie,  $(EA)_i$  i  $(EJ)_i$  – odpowiednio sztywność na ściskanie i zginanie  $i$ -tego pręta,  $(\rho_0 A)_i$  – masa jednostkowa  $i$ -tego pręta,  $t$  – czas.

Geometryczne warunki brzegowe rozważanej kolumny są następujące:

$$w_1(0, \tau) = w_2(0, \tau) = w_3(0, \tau) = 0; w_1(l, \tau) = w_2(l, \tau) = w_3(l, \tau) \quad (3a-e)$$

$$w_1'(\xi, \tau)\Big|_{\xi=0} = w_2'(\xi, \tau)\Big|_{\xi=0} = w_3'(\xi, \tau)\Big|_{\xi=0}; w_1'(\xi, \tau)\Big|_{\xi=1}^{\xi=1} = w_2'(\xi, \tau)\Big|_{\xi=1}^{\xi=1} = w_3'(\xi, \tau)\Big|_{\xi=1}^{\xi=1} \quad (3f-i)$$

$$u_1(0, \tau) = u_2(0, \tau) = u_3(0, \tau) = 0; u_1(1, \tau) = u_2(1, \tau) = u_3(1, \tau) \quad (3j-o)$$

W pracy liczbami rzymskimi oznaczono rząd pochodnej względem współrzędnej przestrzennej, natomiast kropkami oznaczono rząd pochodnej względem czasu.

Na podstawie zasady Hamiltona po uwzględnieniu nieliniowej teorii umiarkowanie dużych ugięć (1) oraz geometrycznych warunków brzegowych (3) otrzymano:

- różniczkowe równania ruchu w kierunku wzdłużnym do osi kolumny

$$\left[ u_i'(\xi, \tau) + \frac{1}{2} (w_i'(\xi, \tau))^2 \right]' = 0 \quad (4)$$

- różniczkowe równania ruchu w kierunku poprzecznym do osi kolumny

$$w_i''(\xi, \tau) + k_i^2(\tau) w_i''(\xi, \tau) + \Omega_i^2 \ddot{w}_i(\xi, \tau) = 0 \quad (5)$$

- naturalne warunki brzegowe

$$\sum_{i=1}^3 (EJ)_i w_{i,i}''(\xi, \tau)\Big|_{\xi=1}^{\xi=1} = 0; \sum_{i=1}^3 (EJ)_i w_i''(\xi, \tau)\Big|_{\xi=0} - C w_1'(\xi, \tau)\Big|_{\xi=0} = 0 \quad (6a,b)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left( k_i^2(\tau) \frac{(EJ)_i}{l^2} \right) - P = 0 \quad (6c)$$

Równanie (4) po dwukrotnym scałkowaniu i uwzględnieniu warunków brzegowych dotyczących przemieszczeń wzdłużnych można zapisać w postaci:

$$u_i(\xi, \tau) = -\frac{k_i^2(\tau)}{\Theta_i} \xi - \frac{1}{2} \int_0^{\xi} [w_i'(\xi, \tau)]^2 d\xi \quad (7)$$

Ze względu na nieliniowość, która występuje w wyrażeniu podcałkowym w równaniu (7), stosuje się metodę małego parametru (por. [3-6, 8, 9]). Metoda ta polega na rozwijaniu wszystkich nieliniowych składników równań różniczkowych  $w_i(\xi, \tau)$ ,  $u_i(\xi, \tau)$ ,  $k_i^2(\tau)$  oraz  $\Omega_i^2$  w szeregi potęgowe małego parametru amplitudy drgań własnych  $\varepsilon$ . W przypadku prostoliniowej postaci równowagi statycznej rozwinięcia w szereg małego parametru są następujące:

$$w_i(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^N \varepsilon^{2j-1} w_{i,2j-1}(\xi, \tau) + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (8a)$$

$$u_i(\xi, \tau) = u_{i0}(\xi) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^{2j} u_{i,2j}(\xi, \tau) + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (8b)$$

$$k_i^2(\tau) = k_{i0}^2 + \sum_{j=1}^N \varepsilon^{2j} k_{i,2j}^2(\tau) + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (8c)$$

$$\Omega_i^2 = \Omega_{i0}^2 + \sum_{j=1}^N \varepsilon^{2j} \Omega_{i,2j}^2 + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (8d)$$

gdzie:

$$w_{ij}(\xi, \tau) = \sum_{z=1}^{j+1} w_{ij}^{(2z-1)}(\xi) \cos[(2z-1)\tau]; j = 1, 3, 5, \dots \quad (9a)$$

$$u_{ij}(\xi, \tau) = u_{ij}^{(0)}(\xi) + \sum_{z=1}^{\frac{j}{2}} u_{ij}^{(2z)}(\xi) \cos[2z\tau]; j = 2, 4, 6, \dots \quad (9b)$$

$$k_{ij}^2(\tau) = k_{ij}^{(0)} + \sum_{z=1}^{\frac{j}{2}} k_{ij}^{(2z)} \cos[2z\tau]; j = 2, 4, 6, \dots \quad (9c)$$

Po podstawieniu rozwinięć w szereg małego parametru (8) do równań różniczkowych przemieszczeń wzdłużnych (7) i poprzecznych (5) oraz po pogrupowaniu składników związanych z jednakową potęgą małego parametru otrzymano nieskończony ciąg równań różniczkowych w dwóch kierunkach (wzdłużnym i poprzecznym):

$$\varepsilon^0 : u_{i0}(\xi) = -\frac{k_{i0}^2}{\Theta_i} \xi \quad (10)$$

$$\varepsilon^1 : w_{i1}^{IV}(\xi, \tau) + k_{i0}^2 w_{i1}^{II}(\xi, \tau) + \Omega_{i0}^2 \ddot{w}_{i1}(\xi, \tau) = 0 \quad (11)$$

$$\varepsilon^2 : u_{i2}(\xi, \tau) = -\frac{k_{i2}^2(\tau)\xi}{\Theta_i} - \frac{1}{2} \int_0^\xi [w_{i1}^I(\xi, \tau)]^2 d\xi \quad (12)$$

$$\varepsilon^3 : w_{i3}^{IV}(\xi, \tau) + k_{i0}^2 w_{i3}^{II}(\xi, \tau) + \Omega_{i0}^2 \ddot{w}_{i3}(\xi, \tau) = -k_{i2}^2(\tau) w_{i1}^{II}(\xi, \tau) - \Omega_{i2}^2 \ddot{w}_{i1}(\xi, \tau) \quad (13)$$

W pracy prezentuje się tylko te równania, które wykorzystano do wyznaczenia liniowej i pierwszej nieliniowej składowej częstości drgań własnych.

Rozwinięcia w szereg małego parametru (8) podstawia się również do warunków brzegowych (3) i (6). Po pogrupowaniu według jednakowych potęg małego parametru otrzymano warunki brzegowe, które muszą być spełnione przez rozwiązania równań związanych z taką samą potęgą małego parametru  $\varepsilon$ .

### 3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Na podstawie równań (10) oraz warunków brzegowych powiązanych z  $\varepsilon^0$  możliwe jest wyznaczenie sił wewnętrznych w poszczególnych członach kolumny przy zadanym obciążeniu zewnętrznym  $P$ :

$$k_{10}^2 = P \left( \frac{\Theta_1 I^2}{\Theta_1 2(EJ)_1 + \Theta_3 (EJ)_3} \right); k_{20}^2 = k_{10}^2; k_{30}^2 = \frac{\Theta_3}{\Theta_1} k_{10}^2 \quad (14a-c)$$

Rozwiązanie równań (11) wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi wykorzystano do wyznaczenia liniowej składowej częstości drgań własnych  $\omega_0$ , która nie jest zależna od amplitudy drgań. Rozwiązania równań (11) po rozdzieleniu zmiennych za pomocą zależności (9) przedstawia się następująco:

$$w_{i1}^{(1)}(\xi) = D_{i1} \cosh(\alpha_{i1} \xi) + D_{i2} \sinh(\alpha_{i1} \xi) + D_{i3} \cos(\beta_{i1} \xi) + D_{i4} \sin(\beta_{i1} \xi) \quad (15)$$

$$\text{gdzie: } \alpha_{i1} = \sqrt{-\frac{k_{i0}^2}{2} + \sqrt{\frac{k_{i0}^4}{4} + \Omega_{i0}^2}}; \beta_{i1} = \sqrt{\frac{k_{i0}^2}{2} + \sqrt{\frac{k_{i0}^4}{4} + \Omega_{i0}^2}}$$

W rozważanym przypadku siły wewnętrzne w prętach kolumny wyznaczono na podstawie równań (14). Po podstawieniu rozwiązań (15) do warunków brzegowych otrzymano układ równań, którego wyznacznik macierzy współczynników przyrównany do zera jest równaniem przestępnym na liniową składową częstości drgań własnych  $\omega_0$ .

Uwzględniając równania (12) oraz odpowiadające tym równaniom warunki brzegowe wyznaczono wielkości  $k_{12}^{(0)}, k_{22}^{(0)}, k_{32}^{(0)}, k_{12}^{(2)}, k_{22}^{(2)}, k_{32}^{(2)}$ , które są składowymi wyższego rzędu sił wewnętrznych w prętach kolumny. Na podstawie równań powiązanych z małym parametrem w trzeciej potęgce (13) określono wzór na pierwszą nieliniową składową częstotliwości drgań własnych  $\omega_2$ . Aby wyznaczyć równanie, z którego oblicza się wartość  $\omega_2$ , stosuje się warunek ortogonalności funkcji własnych. Po wykonaniu odpowiednich przekształceń ostateczna postać tego równania jest następująca:

$$\omega_2^2 = \frac{\sum_i (EJ)_i \frac{3}{2} k_{12}^{(0)} \int_0^1 \left( w_{11}^{(1)}(\xi) \right)^2 d\xi}{\sum_i (\rho A)_i l^4 \int_0^1 \left( w_{11}^{(1)}(\xi) \right)^2 d\xi}; \quad (16)$$

We wzorze (16) w wyrażeniach podcałkowych występuje pochodna rozwiązania danego zależnością (15). W celu wyznaczenia stałych całkowania tego rozwiązania  $D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}$  stosuje się warunek normalizacyjny co do ugięcia. Warunek normalizacyjny dobrano w ten sposób, aby bezwymiarowe największe przemieszczenie układu było równe 1.

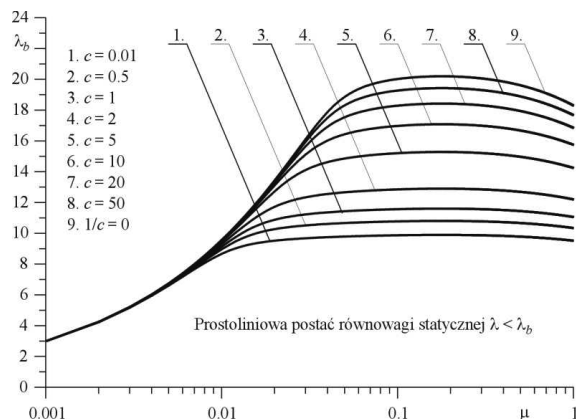
#### 4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

W tej części pracy pokazano wyniki obliczeń numerycznych, które wykonano na podstawie rozwiązania zagadnienia brzegowego. Wyniki zaprezentowano, wykorzystując następujące wielkości:

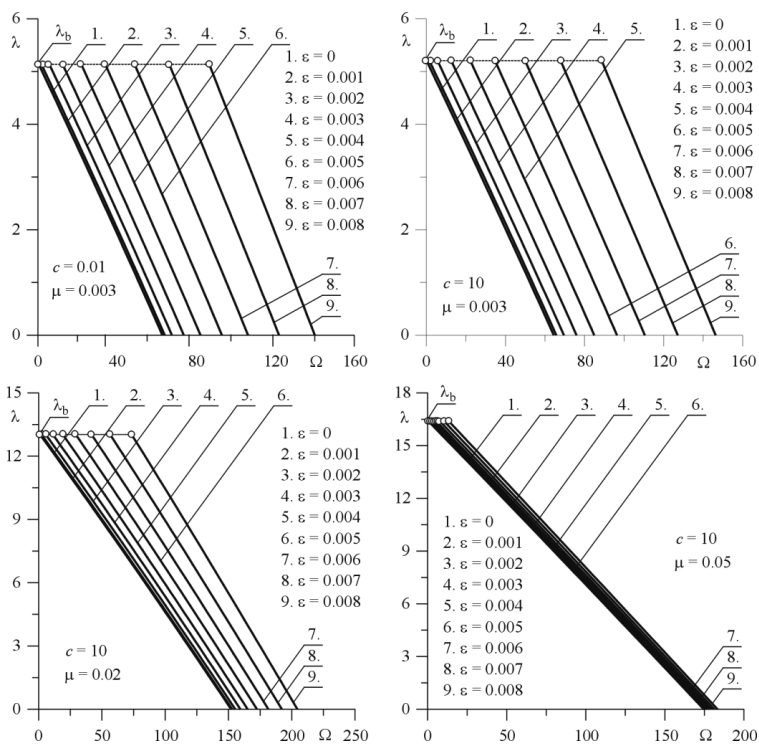
$$\mu = \frac{(EJ)_3}{(EJ)_1 + (EJ)_2}; \quad c = \frac{Cl^3}{\sum_i (EJ)_i}; \quad \lambda = \frac{Pl^2}{\sum_i (EJ)_i}; \quad \lambda_b = \frac{P_b l^2}{\sum_i (EJ)_i}; \quad \zeta_{\lambda_p} = \frac{P}{P_b}; \quad (17a-e)$$

$$\zeta_{\Omega} = \frac{\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_2}{\Omega_0}; \quad \zeta_A = \frac{A}{A_{max}}; \quad \Omega_0 = \frac{\omega_0^2 \sum_i (\rho_0 A)_i l^4}{\sum_i (EJ)_i}; \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2^2 \sum_i (\rho_0 A)_i l^4}{\sum_i (EJ)_i}; \quad (17f-i)$$

Na rys. 2 przedstawiono parametr obciążenia bifurkacyjnego  $\lambda_b$  w zależności od współczynnika asymetrii sztywności na zginanie  $\mu$ . Obliczenia numeryczne wykonano w tym przypadku przy różnych wartościach parametru sztywności zamocowania  $c$  oraz zachowując stałą całkowitą sztywność na zginanie układu  $((EJ)_1 + (EJ)_2 + (EJ)_3 = idem)$ . Przy rozważaniach dotyczących drgań własnych siła zewnętrzna zmienia się w granicach od zera do obciążenia bifurkacyjnego (obszar poniżej prezentowanych na rys. 2 krzywych).



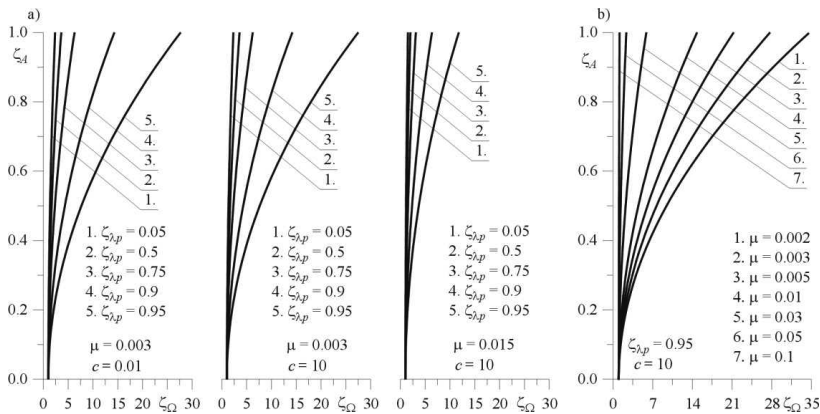
Rys. 2. Parametr obciążenia bifurkacyjnego w zależności od współczynnika asymetrii sztywności na zginanie przy różnej wartości sztywności zamocowania



Rys. 3. Krzywe charakterystyczne na płaszczyźnie obciążenie – częstość drgań własnych przy różnych wartościach parametrów rozważanego układu

Na kolejnych wykresach (rys. 3) przedstawiono krzywe charakterystyczne na płaszczyźnie obciążenie – częstość drgań własnych. W przypadku prezentowanych na rys. 3 krzywych uwzględniono zarówno liniową ( $\Omega_0$ ) jak i nieliniową ( $\Omega_2$ ) składową częstości (częstość jest równa  $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_2$ ). Obliczenia wykonano przy różnych wartościach małego parametru  $\varepsilon$ , przy  $c = 10$ , a także przy trzech wartościach parametru  $\mu$  ( $\mu = 0.003$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\mu = 0.05$ ). Maksymalną amplitudę drgań układu  $A$  ograniczono do podwójnego minimalnego promienia

bezwładności  $r_{min}$  ( $A/r_{min} \in \langle 0,2 \rangle$ ). Na tej podstawie największa wartość małego parametru amplitudy drgań własnych  $\varepsilon$  jest w przybliżeniu równa 0.008 (smukłość  $s$  układu rozważanego w pracy przyjęto  $\approx 250$ ).



Rys. 4. Parametr częstości  $\zeta_{\Omega}$  w zależności od parametru amplitudy  $\zeta_A$ : a) przy różnych wartościach parametru obciążenia  $\zeta_{\lambda p}$  ( $\mu = 0.003$ ;  $0.015$  i  $c = 0.01$ ;  $10$ ), b) przy różnych wartościach współczynnika asymetrii sztywności na zginanie  $\mu$  ( $\zeta_{\lambda p} = 0.95$  i  $c = 10$ )

Na rys. 4 przedstawiono zmianę parametru częstości drgań własnych  $\zeta_{\Omega}$  w zależności od parametru amplitudy drgań własnych  $\zeta_A$  przy różnych wartościach parametru siły obciążającej  $\zeta_{\lambda p}$  (rys. 4a) oraz przy różnych wartościach współczynnika asymetrii sztywności na zginanie  $\mu$  (rys. 4b). Obliczenia numeryczne wykonano przy  $c = 0.01$ ,  $c = 10$ ,  $\mu = 0.003$  i  $\mu = 0.015$  (rys. 4a) a także przy  $c = 10$  i  $\zeta_{\lambda p} = 0.95$  (rys. 4b). Na podstawie przeprowadzonych symulacji numerycznych stwierdzono, że największy wpływ amplitudy drgań na częstość drgań własnych  $\Omega$  występuje przy obciążeniu bifurkacyjnym. Zwiększając współczynnik asymetrii sztywności na zginanie wpływ parametru amplitudy na parametr częstości jest mniejszy.

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia brzegowego dotyczącego poprzecznych drgań własnych smukłego układu geometrycznie nieliniowego poddanego obciążeniu Eulera. Rozważania dotyczyły jedynie prostoliniowej postaci równowagi statycznej. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego pozwoliło na wyznaczenie zarówno liniowej jak i nieliniowej składowej częstości drgań własnych układu. Składowe częstości obliczono przy różnych parametrach rozważanego układu, do których zalicza się współczynnik asymetrii sztywności na zginanie, sztywność zamocowania oraz obciążenie układu. Na podstawie wykonanych symulacji numerycznych stwierdzono, że współczynnik asymetrii sztywności na zginanie jest parametrem, który ma największy wpływ na wartość nieliniowej składowej częstości drgań własnych. Im mniejsza wartość współczynnika asymetrii sztywności na zginanie, tym częstość drgań bardziej jest zależna od amplitudy drgań (większa jest wartość nieliniowej składowej częstości). Amplituda drgań nie wpływa znacząco na częstość drgań własnych przy zmianie sztywności zamocowania.

W przyszłości szczegółowe badania wpływu amplitudy drgań na nieliniową składową częstości powinny dotyczyć innych przypadków obciążenia.

## LITERATURA

1. Bhashyam G. R., Prathap G.: Galerkin finite element method for non-linear beam vibrations. "Journal of Sound and Vibration" 1980, 72, 2, p. 191-203.
2. Mead D. J.: Free vibrations of self-strained assemblies of beam. "Journal of Sound and Vibration" 2002, 249(1), p. 101-126.
3. Nayfeh A.: Perturbation methods. New York: John Wiley, 1973.
4. Nayfeh, A. H. & Mook, D. T. & Sridhar, S.: Nonlinear analysis of the forced response of structural elements. "J. Acoust. Soc. Am." 1974, 55(2), p. 281-291.
5. Przybylski J.: Drgania i stateczność dwuczłonowych układów prętowych wstępnie sprężonych przy obciążeniach niezachowawczych. Częstochowa: Wyd. Pol Częst., 2002. S. „Monografie” nr 92.
6. Przybylski J., Tomski L.: Vibration of an initially prestressed compound column under axial compression. Elsevier Science Publishers B.V., 1992, p. 263-268.
7. Tomski L.: Prebuckling behaviour of compound column – direct nonlinear analysis. ZAMM, Z. Angew. Math. u. Mech. 65, 1985, 1, p. 59-61.
8. Tomski L., Przybylski J., Uzny S.: Drgania swobodne i stateczność układów smukłych geometrycznie nieliniowych. W: Drgania i stateczność układów smukłych – pod red L. Tomskiego. Warszawa: WNT, 2004, s. 261-288.
9. Tomski L., Szmidla J.: Local and global instability and vibration of overbraced Euler's column. "Journal of Theoretical and Applied Mechanics" 2003, , 41, 1, p. 137-154.
10. Tomski L., Uzny S.: Free vibration and the stability of a geometrically non-linear column loaded by a follower force directed towards the positive pole. "International Journal of Solids and Structures" 2008, 45, 1, p. 87-112.

### **NONLINEAR COMPONENT OF FREE VIBRATIONS FREQUENCY OF COLUMN SUBJECTED TO EULER LOAD (RECTILINEAR FORM OF STATIC EQUILIBRIUM)**

Summary. Boundary value problem concerning to free vibrations of geometrically nonlinear slender system subjected to compressed external Euler force was formulated and solved in this work. On account of nonlinearity the small parameter method has been used. In this work rectilinear form of static equilibrium is considered. On the basis of boundary value problem the calculations concerning to linear and nonlinear components of free vibrations frequency have been carried out. Numerical calculations was carried out at different values of system parameters.

*Praca wykonana w ramach pracy BS-1-101-302-99/P Politechniki Częstochowskiej oraz projektu badawczego KBN nr N N501 117236.*