

NIELINIOWA SKŁADOWA CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH KOLUMNY PODDANEJ OBCIĄŻENIU EULERA (KRZYWOLINIOWA POSTAĆ RÓWNOWAGI STATYCZNEJ)

SEBASTIAN UZNY

*Institut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Częstochowska
e-mail: uzny@imipkm.pcz.czyst.pl*

Streszczenie. W pracy rozważa się drgania smukłego układu geometrycznie nieliniowego wokół krzywoliniowej postaci równowagi statycznej. Układ poddano działaniu ściskającej siły zewnętrznej Eulera. Na podstawie zagadnienia brzegowego przeprowadzono obliczenia numeryczne dotyczące liniowej i nieliniowej składowej częstości drgań własnych, które wykonano przy różnych wartościach parametrów układu.

1. WSTĘP

Istnieją dwa typy układów smukłych, które charakteryzują się krzywoliniową postacią równowagi statycznej: bez imperfekcji i z imperfekcją przy zerowej wartości obciążenia.

Pierwszą grupę stanowią układy geometrycznie nieliniowe zbudowane z większej liczby elementów (np. płaska rama składająca się z prętów o różnej sztywności [4, 9, 10, 11] lub układ zbudowany z dwóch współosiowych rur albo rury i pręta [6, 11]). Taki smukły układ charakteryzuje się prostoliniową postacią równowagi statycznej przy obciążeniu zewnętrznym zmieniającym się w zakresie od 0 do obciążenia bifurkacyjnego. Przy obciążeniu bifurkacyjnym statyczna postać równowagi zmienia się z prostoliniowej na krzywoliniową, która występuje aż do wartości obciążenia krytycznego. Przy obciążeniu krytycznym układ traci stateczność. Badania tego typu układu w przypadku krzywoliniowej postaci równowagi statycznej są szczególnie istotne przy lokalnej niestateczności (por. [9, 10, 11]), przy której w układzie jest duża różnica pomiędzy obciążeniem bifurkacyjnym a krytycznym. W takim przypadku, pomimo że układ cechuje się wygiętą postacią statyczną, w dalszym ciągu może być obciążany zewnętrznym aż do osiągnięcia siły krytycznej. Większość prac odnosi się jedynie do prostoliniowej postaci równowagi statycznej [9, 11]. Po raz pierwszy kompletne rozwiązanie zagadnienia statyki przy krzywoliniowej postaci przedstawił L. Tomski w pracy [6]. W zaprezentowanym przez L. Tomskiego rozwiązaniu uwzględniono momenty zginające na końcach układu, które obliczono na podstawie wyprowadzonej analitycznej zależności. Drgania układu bez imperfekcji przy wygiętej postaci równowagi statycznej rozważane były w pracy [10], w której wyznaczono liniową składową częstości drgań własnych przy wybranych wartościach parametrów kolumny. Wzór na pierwszą niezerową nieliniową składową częstości w przypadku krzywoliniowej postaci statyki określono w pracy [4].

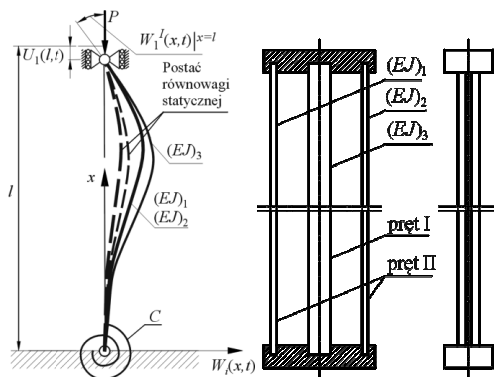
Smukłe układy z imperfekcją w postaci wstępnej krzywizny lub w postaci nieosiowego przyłożenia obciążenia zewnętrznego charakteryzują się krzywoliniową postacią statyczną w zakresie obciążenia zewnętrznego od zera do krytycznego (układ od początku obciążania

go siłą zewnętrzną jest w postaci wygiętej) (por. [1, 2, 5, 7, 8]). W pracy [7] autorzy wyznaczyli nieliniową składową częstości w przypadku ciągłego układu jednoprętowego z imperfekcją w postaci mimośrodowego przyłożenia obciążenia. Układ dyskretny zbudowany z dwóch prętów połączonych i zamocowanych przegubowo rozważali autorzy publikacji [1, 2], w których przemieszczenie przegubu łączącego pręty ograniczono sprężyną o charakterystyce nieliniowej. W pracy [1] wyznaczono obciążenie krytyczne a w pracy [2] częstość drgań własnych. Badania wykonano w zależności od wstępnego wychylenia układu.

Celem niniejszego opracowania są szczegółowe badania dotyczące wpływu parametrów układu (sztywności zamocowania, współczynnika asymetrii sztywności na zginanie, obciążenia zewnętrznego oraz parametru amplitudy drgań) na nieliniową składową częstości drgań własnych przy krzywoliniowej postaci równowagi statycznej. W pracy rozważa się układ bez wstępnej imperfekcji występującej przy zerowej wartości obciążenia zewnętrznego.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Rozważany smukły układ geometrycznie nieliniowy przedstawiono na rys. 1. Układ składa się z trzech prętów połączonych w sposób zapewniający jednakowe przemieszczenia i jednakowe kąty ugięcia poszczególnych prętów na ich końcach. W pracy rozpatruje się drgania układu odbywające się wokół krzywoliniowej postaci równowagi statycznej, która zaznaczona jest na rys. 1 liniami przerywanymi. Układ obciążono przy $x = l$ siłą zewnętrzną P nie zmieniającą kierunku działania oraz zamocowano przy $x = 0$ sprężysto (sztywność zamocowania C).



Rys. 1. Schemat rozważanego układu w przypadku krzywoliniowej postaci równowagi statycznej

Rozważania przeprowadzono, uwzględniając wielkości bezwymiarowe:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad w_i(\xi, \tau) = \frac{W_i(x, \tau)}{l}, \quad u_i(\xi, \tau) = \frac{U_i(x, \tau)}{l}, \quad k_i^2(\tau) = \frac{S_i(\tau)^2}{(EJ)_i} \quad (1a-d)$$

$$\Omega_i^2 = \frac{(\rho_0 A)_i \omega^2 l^4}{(EJ)_i}, \quad \tau = \omega t, \quad \Theta_i = \frac{A_i l^2}{J_i} \quad (1e-g)$$

We wzorach (1) $W_i(x,t)$ i $U_i(x,t)$ – odpowiednio przemieszczenia poprzeczne i wzdłużne i -tego pręta, ω – częstość drgań własnych, $S_i(\tau)$ – siła wewnętrzna w i -tym pręcie, $(EA)_i$

$i(EJ)_i$ – odpowiednio sztywność na ściskanie i zginanie i -tego pręta, $(\rho_0 A)_i$ – masa jednostkowa i -tego pręta, t – czas.

Równania różniczkowe przemieszczeń wzdłużnych i poprzecznych poszczególnych prętów są następujące:

$$u_i(\xi, \tau) = -\frac{k_i^2(\tau)}{\Theta_i} \xi - \frac{1}{2} \int_0^\xi [w_i'(\xi, \tau)]^2 d\xi \quad (2)$$

$$w_i^{IV}(\xi, \tau) + k_i^2(\tau)w_i''(\xi, \tau) + \Omega_i^2 \dot{w}_i(\xi, \tau) = 0 \quad (3)$$

Rozważana kolumna charakteryzuje się warunkami brzegowymi:

$$w_1(0, \tau) = w_2(0, \tau) = w_3(0, \tau) = 0; w_1(1, \tau) = w_2(1, \tau) = w_3(1, \tau) \quad (4a-e)$$

$$w_1'(\xi, \tau)|_{\xi=0} = w_2'(\xi, \tau)|_{\xi=0} = w_3'(\xi, \tau)|_{\xi=0}; w_1'(\xi, \tau)|_{\xi=1}^{\xi=1} = w_2'(\xi, \tau)|_{\xi=1}^{\xi=1} = w_3'(\xi, \tau)|_{\xi=1}^{\xi=1} \quad (4f-i)$$

$$u_1(0, \tau) = u_2(0, \tau) = u_3(0, \tau) = 0; u_1(1, \tau) = u_2(1, \tau) = u_3(1, \tau) \quad (4j-n)$$

$$\sum_{i=1}^3 (EJ)_i w_i''(\xi, \tau)|_{\xi=1}^{\xi=1} = 0; \sum_{i=1}^3 (EJ)_i w_i''(\xi, \tau)|_{\xi=0} - C w_1'(\xi, \tau)|_{\xi=0} = 0 \quad (4o,p)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left(k_i^2(\tau) \frac{(EJ)_i}{l^2} \right) - P = 0 \quad (4r)$$

Liczby rzymskie oznaczają rząd pochodnej względem współrzędnej przestrzennej, natomiast kropki oznaczają rząd pochodnej względem czasu.

Równanie (3) jest nieliniowe i dlatego w celu ostatecznego sformułowania zagadnienia brzegowego stosuje się metodę małego parametru. Metoda ta szczegółowo została opisana w pracy Neyfeh'a [3], a stosowana była również w pracach innych autorów [4, 7, 10, 11]. Polega ona na rozwijaniu wszystkich wielkości nieliniowych ($w_i(\xi, \tau)$, $u_i(\xi, \tau)$, $k_i^2(\tau)$ oraz Ω_i^2) w szeregi potęgowe małego parametru amplitudy drgań ε . W przypadku krzywoliniowej postaci równowagi statycznej rozwinięcia te są następujące:

$$w_i(\xi, \tau) = w_{i0}(\xi) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j w_{ij}(\xi, \tau) + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (5a)$$

$$u_i(\xi, \tau) = u_{i0}(\xi) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j u_{ij}(\xi, \tau) + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (5b)$$

$$k_i^2(\tau) = k_{i0}^2 + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j k_{ij}^2(\tau) + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (5c)$$

$$\Omega_i^2 = \Omega_{i0}^2 + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \Omega_{ij}^2 + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (5d)$$

gdzie:

$$w_{ij}(\xi, \tau) = w_{ij}^{(0)}(\xi) + \sum_{z=1}^j w_{ij}^{(z)}(\xi) \cos z\tau; j = 1, 2, 3, \dots \quad (6a)$$

$$u_{ij}(\xi, \tau) = u_{ij}^{(0)}(\xi) + \sum_{z=1}^j u_{ij}^{(z)}(\xi) \cos z\tau; j = 1, 2, 3, \dots \quad (6b)$$

$$k_{ij}^2(\tau) = k_{ij}^{(0)} + \sum_{z=1}^j k_{ij}^{(z)} \cos z\tau; j = 1, 2, 3, \dots \quad (6c)$$

Ostatecznie podstawia się rozwinięcia w szereg małego parametru (5) do równań różniczkowych (2) i (3) oraz do warunków brzegowych (4) oraz grupuje wszystkie elementy związane z jednakową potęgą małego parametru ε . W ten sposób otrzymano nieskończony ciąg równań różniczkowych oraz odpowiadające tym równaniom warunki brzegowe. W pracy wykorzystuje się równania różniczkowe i warunki brzegowe związane z pierwszymi czterema potęgami małego parametru ε . Rozważane równania różniczkowe są następujące:

$$\varepsilon^0 : w_{i0}^{IV}(\xi, \tau) + k_{i0}^2 w_{i0}^{II}(\xi, \tau) = 0 \quad (7a)$$

$$u_{i0}(\xi) = -\frac{k_{i0}^2 \xi}{\Theta_i} - \frac{1}{2} \int_0^\xi [w_{i0}^I(\xi)]^2 d\xi \quad (7b)$$

$$\varepsilon^1 : w_{i1}^{IV}(\xi, \tau) + k_{i0}^2 w_{i1}^{II}(\xi, \tau) + \Omega_{i0}^2 \ddot{w}_{i1}(\xi, \tau) = -k_{i1}^2 w_{i0}^{II}(\xi, \tau) \quad (8a)$$

$$u_{i1}(\xi, \tau) = -\frac{k_{i1}^2(\tau) \xi}{\Theta_i} - \frac{1}{2} \int_0^\xi [w_{i0}^I(\xi) w_{i1}^I(\xi, \tau)] d\xi \quad (8b)$$

$$\varepsilon^2 : w_{i2}^{IV}(\xi, \tau) + k_{i0}^2 w_{i2}^{II}(\xi, \tau) + \Omega_{i0}^2 \ddot{w}_{i2}(\xi, \tau) = -k_{i1}^2(\tau) w_{i1}^{II}(\xi, \tau) - k_{i2}^2(\tau) w_{i0}^{II}(\xi, \tau) - \Omega_{i1}^2 \ddot{w}_{i1}(\xi, \tau) \quad (9a)$$

$$u_{i2}(\xi, \tau) = -\frac{k_{i2}^2(\tau) \xi}{\Theta_i} - \frac{1}{2} \int_0^\xi [w_{i1}^I(\xi, \tau)]^2 + 2w_{i0}^I(\xi) w_{i2}^I(\xi, \tau) d\xi \quad (9b)$$

$$\varepsilon^3 : w_{i3}^{IV}(\xi, \tau) + k_{i0}^2 w_{i3}^{II}(\xi, \tau) + \Omega_{i0}^2 \ddot{w}_{i3}(\xi, \tau) = -k_{i1}^2(\tau) w_{i2}^{II}(\xi, \tau) - k_{i2}^2(\tau) w_{i1}^{II}(\xi, \tau) - k_{i3}^2(\tau) w_{i0}^{II}(\xi) - \Omega_{i2}^2 \ddot{w}_{i1}(\xi, \tau) - \Omega_{i1}^2 \ddot{w}_{i2}(\xi, \tau) \quad (10a)$$

$$u_{i3}(\xi, \tau) = -\frac{k_{i3}^2(\tau) \xi}{\Theta_i} - \int_0^\xi [w_{i0}^I(\xi) w_{i3}^I(\xi, \tau) + w_{i1}^I(\xi, \tau) w_{i2}^I(\xi, \tau)] d\xi \quad (10b)$$

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Zagadnienie brzegowe rozwiązuje się sekwencyjnie, tzn. w rozwiązaniu równań związanych z i -tą potęgą małego parametru ε uwzględnia się rozwiązania równań związanych z potęgami mniejszymi, a mianowicie $0, \dots, i-1$.

Na podstawie rozwiązania równania (7a) oraz odpowiednich warunków brzegowych otrzymano relacje pomiędzy siłami wewnętrznymi w poszczególnych prętach układu. Uwzględniając równanie (7b) i związane z tym równaniem warunki brzegowe, oblicza się nieznanne stałe całkowania rozwiązania równania (7a). Rozwiązanie równania (8a) oraz warunki brzegowe, które im odpowiadają, wykorzystuje się do wyznaczenia liniowej częstości drgań własnych ω_0 . Kolejne równania (8b) uwzględniono przy obliczeniach składowych sił wewnętrznych $S_{i1}(\tau)$. Pierwszą nieliniową składową częstości drgań własnych ω_1 określa się na podstawie równań (9a), uwzględniając warunek ortogonalności funkcji $w_{i2}(\xi, \tau)$ oraz $w_{i1}(\xi, \tau)$. Na podstawie przeprowadzonych rozważań pierwsza nieliniowa składowa częstości jest równa zero ($\omega_1 = 0$). Następne równania (9b) wykorzystuje się w celu wyznaczenia składowych sił wewnętrznych $S_{i2}(\tau)$. Równań różniczkowych (10a) po uwzględnieniu warunku ortogonalności funkcji $w_{i3}(\xi, \tau)$ oraz $w_{i1}(\xi, \tau)$ używa się do obliczenia drugiej nieliniowej składowej częstości drgań własnych ω_2 , która jest niezerowa. Po przekształceniach ostateczny wzór na wartość nieliniowej składowej częstości drgań własnych ω_2 przedstawić można w sposób następujący:

$$\omega_2^2 = \left((EJ)_1 \int_0^1 \left\{ 2k_{11}^{(1)} \left[2w_{31}^{(1)}(\xi) \left(w_{32}^{(0)}(\xi) + \frac{1}{2} w_{32}^{(2)}(\xi) \right) - w_{11}^{(1)}(\xi) \left(w_{12}^{(0)}(\xi) + \frac{1}{2} w_{12}^{(2)}(\xi) \right) - w_{21}^{(1)}(\xi) \left(w_{22}^{(0)}(\xi) + \frac{1}{2} w_{22}^{(2)}(\xi) \right) \right] + \left(k_{12}^{(0)} + \frac{1}{2} k_{12}^{(2)} \right) \left[2 \left(w_{31}^{(1)}(\xi) \right)^2 - \left(w_{11}^{(1)}(\xi) \right)^2 - \left(w_{21}^{(1)}(\xi) \right)^2 \right] \right\} d\xi \right) / \sum_i (\rho A)_i l^4 \int_0^1 \left[w_{11}^{(1)}(\xi) \right]^2 d\xi \quad (11)$$

W celu wyznaczenia kolejnych postaci drgań własnych, które są uwzględniane we wzorze (11), wykorzystuje się warunek normalizujący odnośnie do przemieszczenia. Warunek ten przyjęto w taki sposób, że największe przemieszczenie układu jest równe 1.

4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

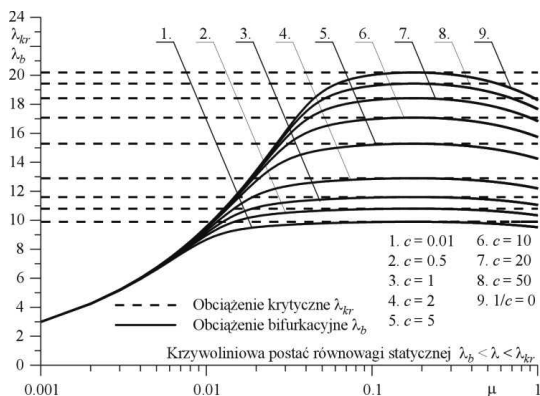
W tej części pracy pokazano wyniki obliczeń numerycznych, które wykonano na podstawie rozwiązania zagadnienia brzegowego. Wyniki zaprezentowano, wykorzystując następujące wielkości:

$$\mu = \frac{(EJ)_3}{(EJ)_1 + (EJ)_2}; c = \frac{Cl^3}{\sum_i (EJ)_i}; \lambda = \frac{Pl^2}{\sum_i (EJ)_i}; \lambda_b = \frac{P_b l^2}{\sum_i (EJ)_i}; \quad (12a-d)$$

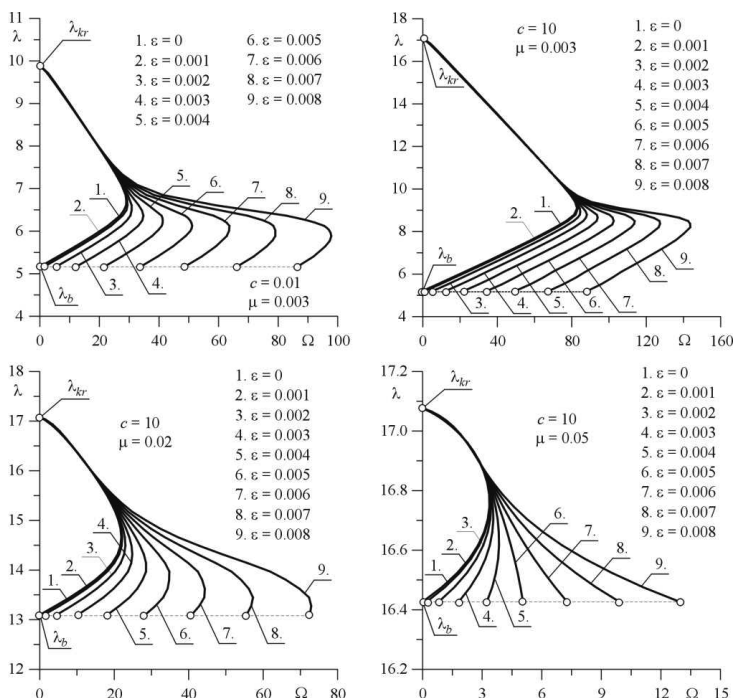
$$\lambda_{kr} = \frac{P_{kr} l^2}{\sum_i (EJ)_i}; \zeta_{\lambda k} = \frac{P - P_b}{P_{kr} - P_b}; \zeta_{\Omega} = \frac{\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_2}{\Omega_0}; \zeta_A = \frac{A}{A_{max}}; \quad (12e-h)$$

$$\Omega_0 = \frac{\omega_0^2 \sum_i (\rho_0 A)_i l^4}{\sum_i (EJ)_i}; \Omega_2 = \frac{\omega_2^2 \sum_i (\rho_0 A)_i l^4}{\sum_i (EJ)_i} \quad (12i,j)$$

Na rys. 2 przedstawiono bezwymiarowe parametry obciążenia bifurkacyjnego i krytycznego w zależności od współczynnika asymetrii sztywności na zginanie μ . Obliczenia numeryczne wykonano przy różnej wartości sztywności zamocowania oraz przy stałej całkowitej sztywności na zginanie układu ($(EJ)_1 + (EJ)_2 + (EJ)_3 = idem$). Obciążenie bifurkacyjne oznaczono na rysunku krzywymi ciągłymi, natomiast krytyczne przerywanymi. Krzywoliniowa postać równowagi statycznej odpowiada obciążeniu zewnętrznemu z zakresu od obciążenia bifurkacyjnego do krytycznego (jest to obszar pomiędzy krzywymi ciągłymi i przerywanymi przy zadanej sztywności zamocowania). Obciążenie krytyczne układu jest niezależne od współczynnika asymetrii sztywności na zginanie przy zadanej wartości sztywności zamocowania. Istnieje taka wartość współczynnika μ , przy której obciążenia: bifurkacyjne i krytyczne są równe. W tym szczególnym przypadku ($\lambda_{kr} = \lambda_b$) w rozważanym układzie nie występuje krzywoliniowa postać równowagi statycznej. Największe różnice pomiędzy obciążeniem bifurkacyjnym a krytycznym występują przy małej wartości współczynnika μ . W tym zakresie badania dotyczące drgań wokół krzywoliniowej postaci równowagi statycznej są w sposób szczególnie uzasadnione, gdyż układ osiąga wygiętą postać równowagi statycznej przy stosunkowo niskim poziomie obciążenia w porównaniu do maksymalnego obciążenia (obciążenia krytycznego).



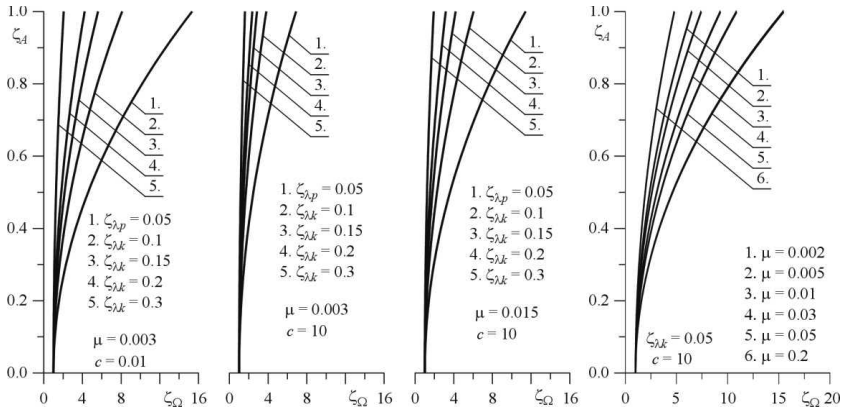
Rys. 2. Parametr obciążenia bifurkacyjnego i krytycznego w zależności od współczynnika asymetrii sztywności na zginanie μ



Rys. 3. Krzywe charakterystyczne na płaszczyźnie obciążenie – częstość drgań własnych przy różnych wartościach parametrów rozważanego układu

Na rys. 3 przedstawiono parametr częstości drgań własnych ($\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_2$) w zależności od parametru obciążenia zewnętrznego λ . Obliczenia numeryczne wykonano przy różnych wartościach małego parametru amplitudy drgań własnych ε oraz przy wybranych wartościach pozostałych parametrów układu (sztywności zamocowania $c = 0.01; 10$ oraz współczynnika asymetrii sztywności na zginanie $\mu = 0.003; 0.02; 0.05$). Liniowa składowa wartości parametru częstości Ω_0 przy obciążeniu bifurkacyjnym λ_b jest równa zero. Dopiero po uwzględnieniu nieliniowej składowej (Ω_2) częstość odpowiadająca temu obciążeniu charakteryzuje się wartością większą od zera. Wartość parametru Ω powiązana jest

z wielkością amplitudy drgań własnych, której odpowiada mały parametr ε . Przy obciążeniu bifurkacyjnym λ_b druga składowa częstości Ω_2 ma największy wpływ na wartość Ω . W miarę wzrostu obciążenia wpływ ten jest coraz mniejszy, a przy wyższym obciążeniu (bliskiemu obciążeniu krytycznemu (λ_{kr})) częstość drgań nie jest zależna od wartości amplitudy (krzywe częstości pokrywają się). Biorąc pod uwagę mniejsze wartości współczynnika asymetrii sztywności na zginanie μ ($\mu = 0.003; 0.02$), stwierdza się, że krzywe częstości charakteryzują się dodatnim nachyleniem w początkowej fazie obciążenia. W przypadku większych wartości współczynnika μ (por. rys. 3 przy $\mu = 0.05$) nachylenie rozważanych krzywych $\lambda(\Omega)$ zależne jest od wielkości małego parametru ε .



Rys. 4. Parametr częstości ζ_{Ω} w zależności od parametru amplitudy ζ_A przy różnych wartościach parametrów $\zeta_{\lambda k}$, μ i c

Na rys. 4 przedstawiono parametr częstości ζ_{Ω} w zależności od parametru amplitudy drgań ζ_A . Obliczenia numeryczne wykonano przy różnych wartościach współczynnika asymetrii sztywności na zginanie μ , sztywności zamocowania c , a także przy różnych wartościach obciążenia, które określone jest parametrem $\zeta_{\lambda k}$. Parametr amplitudy drgań ζ_A określa relację pomiędzy amplitudą drgań układu a maksymalną amplitudą, którą wyznaczono jako podwójną wartość minimalnego promienia bezwładności r_{min} ($r_{min} = (\sum J / \sum A)^{1/2}$). Wartość małego parametru ε_{max} jest równa w przybliżeniu 0.008 (smukłość s układu rozważanego w pracy przyjmuje się ≈ 250).

5. PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy rozważano drgania własne układu geometrycznie nieliniowego, które odbywają się wokół krzywoliniowej postaci równowagi statycznej. Wyznaczono częstość drgań własnych, która składa się z dwóch składowych liniowej i nieliniowej. Obliczenia numeryczne wykonano przy różnych wartościach parametrów rozważanego układu, do których zalicza się współczynnik asymetrii sztywności na zginanie μ , sztywność zamocowania c , a także mały parametru ε związany z amplitudą drgań własnych. Na podstawie obliczeń numerycznych stwierdzono, że istotny wpływ amplitudy drgań na częstość drgań własnych zauważalny jest przy obciążeniu bifurkacyjnym. Pomiędzy punktem bifurkacyjnym a krytycznym wpływ amplitudy na częstość zmniejsza się wraz ze wzrostem obciążenia. Badania drgań w przypadku krzywoliniowej postaci równowagi statycznej szczególnie istotne

są przy mniejszej wartości współczynnika asymetrii sztywności na zginanie μ , przy której układ charakteryzuje się lokalną niestatecznością (por. [9, 10, 11]).

LITERATURA

1. Elishakoff I.: Remarks on the static and dynamic imperfection-sensitivity of nonsymmetric structures. "Journal of Applied Mechanics" 1980, Vol. 47, March, p. 111-115.
2. Elishakoff I., Birman V., Singer J.: Effect of imperfections on the vibrations of loaded structures. "Journal of Applied Mechanics" 1984, Vol. 51, March, p. 191-193.
3. Nayfeh A.: Perturbation methods. New York : John Wiley, 1973.
4. Przybylski J.: Drgania i stateczność dwuczłonowych układów prętowych wstępnie sprężonych przy obciążeniach niezachowawczych. Częstochowa: Wyd. Pol. Częst., 2002. S. „Monografie” nr 92.
5. Smitses G.J., Hodges D.H.: Fundamentals of structural stability. Elsevier, 2006.
6. Tomski L.: Prebuckling behaviour of compound column – direct nonlinear analysis. ZAMM, Z. Angew. Math. u Mech. 65, 1985, 1, p. 59-61.
7. Tomski L., Kukła S.: Free vibration of a certain geometrically non-uniform system with initial imperfection. AIAA Journal 1990, Vol. 28, No. 7, p. 1240-1245.
8. Tomski L., Podgórska-Brzdękiewicz I. Global buckling and the interaction of initial imperfections of columns subjected to conservative loading. "Thin-Walled Structures" 2011, 49, p. 596–603.
9. Tomski L., Szmidla J.: Local and global instability and vibration of overbraced Euler's column. "Journal of Theoretical and Applied Mechanics" 2003, 41, 1, p. 137-154.
10. Tomski L., Uzny S.: Free vibration and the stability of a geometrically non-linear column loaded by a follower force directed towards the positive pole. "International Journal of Solids and Structures" 2008, 45, 1, p. 87-112.
11. Uzny S.: Local and global instability and vibrations of a slender system consisting of two coaxial elements. "Thin-Walled Structures" 2011, 49, p. 618–626.

NONLINEAR COMPONENT OF FREE VIBRATIONS FREQUENCY OF COLUMN SUBJECTED TO EULER LOAD (CURVILINEAR FORM OF STATIC EQUILIBRIUM)

Summary. Boundary value problem concerning to free vibrations of geometrically nonlinear slender system subjected to compressed external Euler force was formulated and solved in this work. On account nonlinearity the small parameter method has been used. In this work curvilinear form of static equilibrium is considered. On the basis of boundary value problem the calculations concerning to linear and nonlinear components of free vibrations frequency have been carried out. Numerical calculations was carried out at different values of system parameters.

Praca wykonana w ramach pracy BS-1-101-302-99/P Politechniki Częstochowskiej oraz projektu badawczego KBN nr N N501 117236.