

## WEKTOROWO – PUNKTOWA METODA ROZWIĄZYWANIA ODWROTNEGO ZADANIA KINEMATYKI ROBOTA FANUC AM100iB

JERZY ŚWIDER, ADRIAN ZBILSKI

*Instytut Automatykacji Procesów Technologicznych i Zintegrowanych Systemów Wytwarzania  
e-mail: jerzy.swider@politechnika.slaska.pl, adrian.zbilski@politechnika.slaska.pl*

Streszczenie. Artykuł zawiera opis sposobu rozwiązywania odwrotnego zadania kinematyki robota FANUC AM100iB. Metoda bazuje na zapisie położeń przegubów oraz ramion robota za pomocą punktów i wektorów. Do wyznaczania wartości współrzędnych naturalnych robota zastosowano typowe operacje na wektorach.

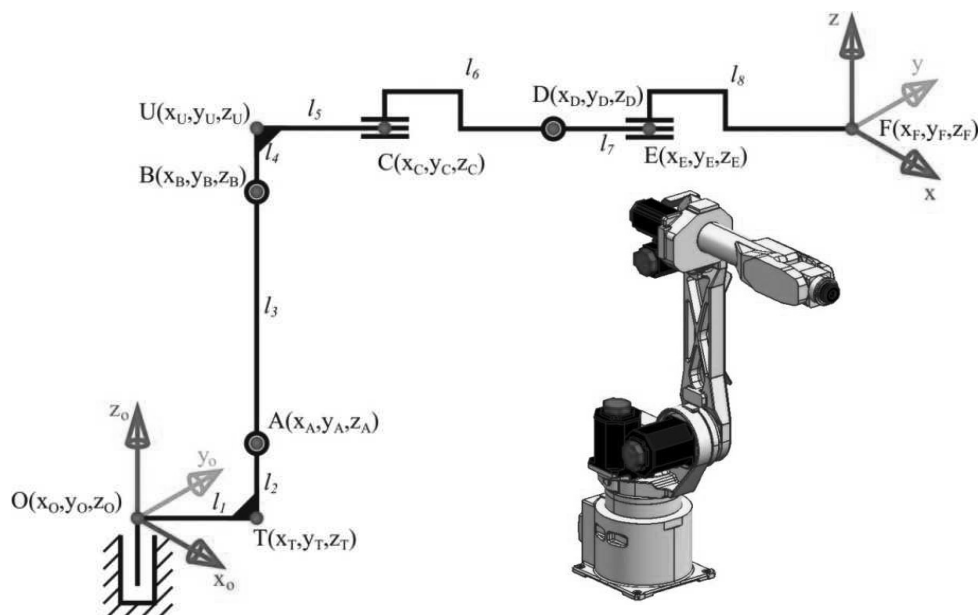
### 1. WSTĘP

W celu realizacji procesu sterowania pracą robota lub manipulatora konieczne jest wyznaczenie zależności między położeniem elementu wykonawczego robota (np. chwytaka) a położeniem wałów silników napędzających poszczególne człony. Zagadnienie takie nazywane jest odwrotnym zadaniem kinematyki, które musi być zaimplementowane w układzie sterowania robota. Trudność w rozwiązywaniu tego problemu wynika z konieczności opisywania i sterowania otwartym łańcuchem kinematycznym, jakim jest robot. W celu rozwiązania tego zagadnienia stosowanych jest wiele różnych metod numerycznych [1,2] lub analitycznych [3]. Autorzy pracy proponują własną metodę analityczną, której zaletą jest prostota i intuicyjność podejścia do zagadnienia.

### 2. PUNKTY CHARAKTERYSTYCZNE ROBOTA

#### 2.1. Model robota

Widok ogólny robota FANUC AM100iB w przestrzeni trójwymiarowej uzyskany na podstawie modelu CAD przedstawia rys. 1. Model wykonany jest w skali 1:1, dlatego wszystkie wymiary stosowane w pracy mają bezpośrednie odzwierciedlenie na rzeczywistym obiekcie. Rys. 1 zawiera także model fenomenologiczny oraz oznaczenia ramion i przegubów stosowane w tej pracy.



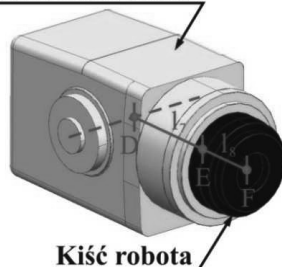
Rys. 24. Widok ogólny robota FANUC AM100iB oraz jego model fenomenologiczny

W opracowanej metodzie obliczania odwrotnego zadania kinematyki robota do wyznaczenia kątów między ramionami zastosowany został opis położenia w przestrzeni trójwymiarowej punktów związanych z przegubami robota oraz punktów pomocniczych (rys. 1). Następnie punkty te posłużyły do opisanego wektorów reprezentujących kolejne człony a na końcu obliczone zostały kąty między kolejnymi wektorami zorientowanymi w przestrzeni 3D.

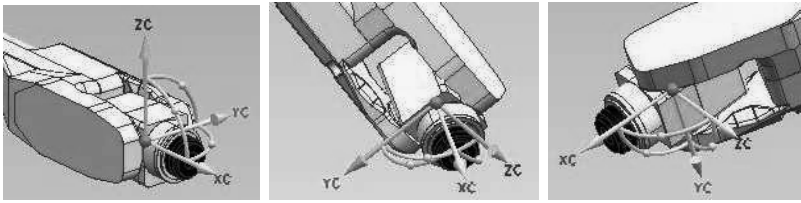
## 2.2. Pozycjonowanie kiści robota

Ostatni odcinek łańcucha kinematycznego EF opisany został za pomocą wektora  $\overline{EF}$  jak na rys. 2. Identyczną orientację lokalnej osi  $x$ , taką jak kiść, zawsze będzie miał człon przedostatni, dlatego odcinek EF może być powiększony o odcinek DE (rys. 3). W związku z tym w dalszej części pracy rozpatrywany będzie odcinek DF opisywany za pomocą wektora  $\overline{DF}$  będącego sumą odcinków DE i EF, którego orientacja zawsze będzie opisywała zarówno orientację kiści jak i orientację lokalnej osi  $x$  członu przedostatniego.

### Przedostatni człon robota



Rys. 25. Położenie i orientacja kiści reprezentowana będzie przez odcinek DF



Rys. 26. Orientacja osi x lokalnego układu współrzędnych członu przedostatniego jest zawsze taka sama jak orientacja osi x lokalnego układu współrzędnych kiści

Aby uprościć zadanie wyznaczania orientacji wektora  $\overline{DF}$  w przestrzeni trójwymiarowej sprowadzono go do odpowiadającego mu wektora bazowego  $\overline{D_0F_0}$ , którego punkt początkowy  $D_0$  pokrywa się z początkiem globalnego układu współrzędnych, a punkt  $F_0$  przyjmuje współrzędne według wyrażenia:

$$F_1 = \mathbf{RotDF} \cdot \overline{D_0F_0}^T \quad (1)$$

Macierz **RotDF** jest typową macierzą rotacji względem osi odpowiednio  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  wyrażoną za pomocą zależności:

$$\mathbf{RotDF} = \begin{bmatrix} c(s(\theta)c(s(\psi)) & c(s(\theta)\sin(\psi)) & -\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta)c(s(\psi)) - c(s(\varphi)\sin(\psi)) & \sin(\varphi)\sin(\theta)\sin(\psi) + c(s(\varphi)c(s(\psi)) & \sin(\varphi)c(s(\theta)) \\ c(s(\varphi)\sin(\theta)c(s(\psi)) + \sin(\varphi)\sin(\psi) & c(s(\varphi)\sin(\theta)\sin(\psi)) - \sin(\varphi)c(s(\psi)) & c(s(\varphi)c(s(\theta)) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Po wyznaczeniu współrzędnych punktu  $F_1$  w następnym kroku wyznaczono współrzędne punktu  $D$ , który umożliwia kompletne opisanie położenia oraz orientacji wektora  $\overline{DF}$  w przestrzeni 3D. W tym celu punkt  $D_0$  transformowano równoległe wzdłuż osi globalnego układu współrzędnych o wektor translacji  $\overline{Trans}$ , którego współrzędne wynikają z różnicy między współrzędnymi punktu zadanego  $F$  oraz współrzędnymi punktu  $F_1$  i wyznaczane są z zależności:

$$\overline{Trans} = F - F_1 \quad (3)$$

Zatem współrzędne punktu  $D$  wyznaczane są według wyrażenia:

$$D = D_0 + \overline{Trans} \quad (4)$$

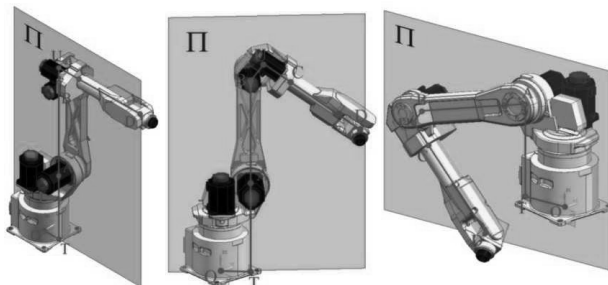
Po wyznaczeniu współrzędnych punktu  $D$  oraz przy zadanych współrzędnych punktu  $F$ , który jest docelową pozycją robota, położenie i orientacja kiści oraz położenie i orientacja lokalnej osi x przedostatniego członu robota są kompletne.

### 2.3. Wyznaczanie położenia pozostałych punktów charakterystycznych robota w przestrzeni 2D

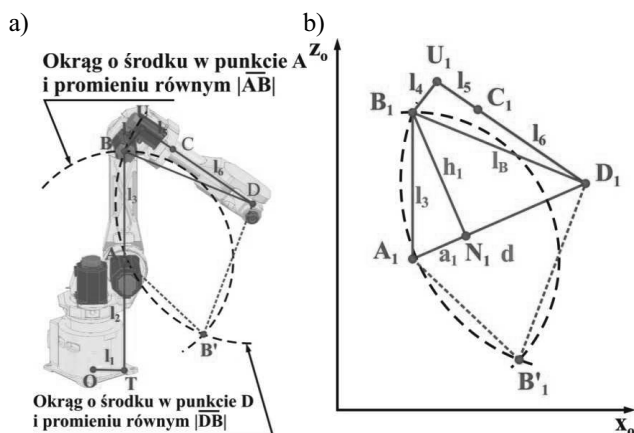
Na początku procedury obliczeniowej zastosowano fakt, że punkty od  $O$  do  $D$  wzdłuż łańcucha kinematycznego robota (rys. 1b) leżą zawsze na jednej płaszczyźnie  $\Pi$ , niezależnie od układu ramion robota (rys. 4). Dzięki temu wszystkie operacje zrealizowano w przestrzeni dwuwymiarowej na płaszczyźnie rozpiętej między osiami globalnego układu współrzędnych  $x_0 - z_0$ . Następnie tak wyznaczone punkty przetransformowano do przestrzeni trójwymiarowej.

Z analizy struktury wynika, że najbardziej kłopotliwym do wyznaczenia punktem jest punkt  $B$ , ponieważ znajduje się on między dwoma ramionami, których orientacja

w przestrzeni nie zależy od siebie (poza orientacją zdeterminowaną pionową płaszczyzną). Położenie punktu B wyznaczono zatem na podstawie faktu, że jest on zawsze jednym z dwóch punktów przecięcia dwóch okręgów o środkach w punktach A i D oraz promieniach o długościach równych długości odcinków odpowiednio AB i BD (rys. 5a). Operacje związane z wyznaczaniem punktu B zrealizowano w przestrzeni dwuwymiarowej (rys. 5b).



Rys. 27. Punkty charakterystyczne od O do D leżą zawsze w jednej płaszczyźnie



Rys. 28. Punkt B jest jednym z dwóch punktów przecięcia dwóch okręgów. b) Współrzędne punktu B wyznaczone są najpierw w przestrzeni 2D

Wartości współrzędnych punktu  $B_1$  wyznaczono z zależności wynikających z prostokątów dwóch wektorów w przestrzeni dwuwymiarowej. W związku z tym współrzędne punktu  $B_1$  opisane są za pomocą następującego wyrażenia:

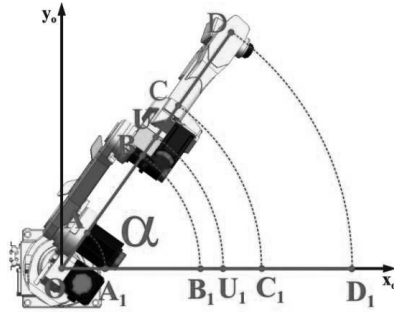
$$B_1 = \left( x_{N1} - \left( \frac{h_1}{|A_1D_1|} \right) \cdot (z_{A1} - z_{D1}); y_0; z_{N1} + \left( \frac{h_1}{|A_1D_1|} \right) \cdot (x_{A1} - x_{D1}) \right) \quad (5)$$

Położenie pozostałych punktów wyznaczono z zależności geometrycznych, jakie występują między ramionami. Wszystkie operacje zrealizowano w przestrzeni dwuwymiarowej.

## 2.4. Wyznaczenie punktów charakterystycznych robota w przestrzeni 3D

W przestrzeni trójwymiarowej na początku wyznaczono tylko wektor  $\overline{DF}$ . Dlatego transformacja wszystkich punktów wyznaczonych w przestrzeni dwuwymiarowej do

przestrzeni trójwymiarowej polegała na rotacji każdego z tych punktów względem osi  $z_o$  o kąt  $\alpha$  zawarty między prostą OD i osią  $x_o$  (rys. 6).



Rys. 29. Wyznaczenie współrzędnych punktów od O do D<sub>1</sub> w przestrzeni 3D polega na ich rotacji względem pionowej osi  $z_o$

Wartość kąta  $\alpha$  o który obracane są wszystkie punkty wyznaczona jest ze wzoru na kąt między dwoma wektorami i przyjmuje postać:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\overline{OD_1} \cdot \overline{OD}|}{|\overline{OD_1}| \cdot |\overline{OD}|}\right) \quad (6)$$

Obrót punktów względem osi  $z_o$  pozwala na zdefiniowanie ich położenia w przestrzeni trójwymiarowej, a następnie za ich pomocą opisanie wszystkich wektorów reprezentujących położenie członów robota.

## 2.5. Wyznaczenie kątów między kolejnymi członami robota

Obliczanie wszystkich kątów między członami robota sprowadza się do zastosowania tego samego wzoru na wartość kąta między dwoma wektorami. Kąt obrotu przegubu pierwszego, czyli przegubu między podstawą robota a drugim członem, obliczony został już podczas wyznaczania macierzy rotacji względem pionowej osi  $z_o$  i wyrażony jest równaniem:

$$q_1 = \alpha \quad (7)$$

Z tego zapisu nie wynika jedna znak obrotu, dlatego wyrażenie musi być uzupełnione o ten czynnik. Zostało to wykonane za pomocą następującego równania:

$$q_1 = \begin{cases} \alpha, & y_D \geq 0 \\ -\alpha, & y_D < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Kąt obrotu przegubu drugiego oraz jego znak wyznaczony został z następującej zależności:

$$q_2 = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\overline{A_1 T_1} \cdot \overline{A_1 B_1}}{|\overline{A_1 T_1}| \cdot |\overline{A_1 B_1}|}\right), & x_{B1} \geq x_{A1} \\ -\arccos\left(\frac{\overline{A_1 T_1} \cdot \overline{A_1 B_1}}{|\overline{A_1 T_1}| \cdot |\overline{A_1 B_1}|}\right), & x_{B1} < x_{A1} \end{cases} \quad (9)$$

Kąt obrotu przegubu trzeciego oraz jego znak wyznaczony został z następującej zależności:

$$q_3 = \begin{cases} \pi - \arccos\left(\frac{\overline{B_1 A_1} \cdot \overline{B_1 U_1}}{|\overline{B_1 A_1}| \cdot |\overline{B_1 U_1}|}\right), & y_{J1} \geq 0 \\ -\left[\pi - \arccos\left(\frac{\overline{B_1 A_1} \cdot \overline{B_1 U_1}}{|\overline{B_1 A_1}| \cdot |\overline{B_1 U_1}|}\right)\right], & y_{J1} < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Kąt obrotu przegubu czwartego oraz jego znak wyznaczony został z następującej zależności:

$$q_4 = \begin{cases} \arccos\left(s\left(\frac{\overline{DL} \cdot \overline{DK}}{|\overline{DL}| \cdot |\overline{DK}|}\right)\right), & \angle(\overline{DM}, \overline{DK}) \leq \frac{\pi}{2} \\ -\arccos\left(s\left(\frac{\overline{DL} \cdot \overline{DK}}{|\overline{DL}| \cdot |\overline{DK}|}\right)\right), & \angle(\overline{DM}, \overline{DK}) > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (11)$$

Kąt obrotu przegubu piątego oraz jego znak wyznaczony został z następującej zależności:

$$q_5 = \begin{cases} \pi - \arccos\left(s\left(\frac{\overline{DU} \cdot \overline{DF}}{|\overline{DU}| \cdot |\overline{DF}|}\right)\right), & \angle(\overline{DL}, \overline{DF}) \geq \frac{\pi}{2} \\ -\left[\pi - \arccos\left(s\left(\frac{\overline{DL} \cdot \overline{DK}}{|\overline{DL}| \cdot |\overline{DK}|}\right)\right)\right], & \angle(\overline{DL}, \overline{DF}) < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Kąt obrotu przegubu szóstego oraz jego znak wyznaczony został z następującej zależności:

$$q_6 = \begin{cases} \pi - \arccos\left(s\left(\frac{\overline{DW} \cdot \overline{DK}}{|\overline{DW}| \cdot |\overline{DK}|}\right)\right), & \angle(\overline{DWY}, \overline{DK}) \geq \frac{\pi}{2} \\ -\left[\pi - \arccos\left(s\left(\frac{\overline{DW} \cdot \overline{DK}}{|\overline{DW}| \cdot |\overline{DK}|}\right)\right)\right], & \angle(\overline{DWY}, \overline{DK}) < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (13)$$

### 3. PODSUMOWANIE ORAZ WNIOSKI

Na podstawie zapisu punktów charakterystycznych robota związanych z jego przegubami oraz punktów pomocniczych możliwe jest określenie pozycji oraz orientacji wszystkich członów robota za pomocą wektorów reprezentujących kolejne człony w przestrzeni trójwymiarowej. Tylko w jednym przypadku podczas wyznaczania położenia punktu  $B_1$  dochodzi do osobliwości, która jest źródłem podwójnego rozwiązania współrzędnych położenia tego punktu. Problem ten jednak został rozwiązany poprzez arbitralny wybór takiego rozwiązania, które zapewnia wyznaczenie układu członów robota w taki sam sposób, jaki występuje w obiekcie rzeczywistym. Porównując opracowaną metodę do popularnej metody bazującej na zapisie kinematyki robota za pomocą notacji Denavita – Hartenberga, można uznać, że pozwala ona uzyskać równania kątów współrzędnych naturalnych robota znacznie prościej. Metoda nie prowadzi do nieliniowych równań kinematyki, których rozwiązanie jest bardzo kłopotliwe.

### LITERATURA

1. Barinka L.: Inverse kinematics - basic methods.  
<http://www.cg.tuwien.ac.at/hostings/cescg/CESCG-2002/LBarinka/paper.pdf>
2. Joubert N.: Numerical methods for inverse kinematics.  
[http://njoubert.com/teaching/cs184\\_fa08/section/sec13inversekinematics.pdf](http://njoubert.com/teaching/cs184_fa08/section/sec13inversekinematics.pdf)
3. Craig J.J.: Introduction to robotics: mechanics and control (3rd Edition). Massachusetts: Addison–Wesley, 2005.
4. Beer F. P., Johnston E. R.: Vector mechanics for engineers. New York: McGraw-Hill Book Company, 1977.

### VECTOR - POINT METHOD OF SOLVING INVERS KINEMATIC PROBLEM

Summary. In the paper the possible way to solve inverse kinematic problem of FANUC AM100iB robot is presented. Method based on describing robots joints and arms positions using characteristic points and vectors. Values of natural coordinates of robot are calculated using typical operations on vector.