

OPTIMALIZACJA ZREDUKOWANYCH MODELI MATEMATYCZNYCH Z ZASTOSOWANIEM ALGORYTMU DWUSTOPNIOWEGO

MAREK RYDEL, WŁODZIMIERZ STANISŁAWSKI

*Institut Automatyki i Informatyki, Politechnika Opolska
e-mail: m.rydel@po.opole.pl, w.stanislawski@po.opole.pl*

Streszczenie. W artykule zaprezentowano zagadnienia związane z redukcją złożonych liniowych modeli obiektów sterowania typu MIMO. Zaproponowano optymalizację parametrów redukcji z zastosowaniem algorytmu dwustopniowego. Przedstawiono wyniki redukcji na przykładzie modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika kotła energetycznego BP-1150.

1. WSTĘP

Dla celów sterowania systemami niezbędna jest znajomość ich modeli matematycznych, które mogą być tworzone poprzez modelowanie zjawisk zachodzących w obiekcie oraz na podstawie identyfikacji. Od wielu lat mamy do czynienia z bardzo intensywnym wzrostem mocy obliczeniowych komputerów oraz rozwojem oprogramowania służącego do modelowania i symulacji złożonych obiektów sterowania, co skutkuje coraz większą złożonością otrzymywanych modeli. Szczególnie istotny wpływ na wzrost złożoności modeli ma rozwój programów do modelowania układów z zastosowaniem metody elementów skończonych. Programy takie automatycznie generują tysiące elementów skończonych, a uzyskane modele matematyczne zawierają tysiące, a nawet setki tysięcy zmiennych stanu [1, 11]. Wysoka złożoność modelu matematycznego pociąga za sobą długie czasy symulacji komputerowej, znaczne zapotrzebowanie mocy obliczeniowej procesorów oraz problemy numeryczne. Z tego względu dużego znaczenia praktycznego nabiera umiejętność odpowiedniej redukcji złożoności otrzymanego modelu.

Niniejsza praca prezentuje problem optymalizacji parametrów redukcji z zastosowaniem algorytmu ewolucyjnego. Ze względu na element losowości występujący w algorytmach ewolucyjnych, ocena uzyskanych wyników wymaga wykonania wielu niezależnych uruchomień algorytmu. Powoduje to znaczny wzrost kosztu obliczeń, co skutkuje długim czasem uzyskania rzetelnych wyników redukcji. Ze względu na cechy algorytmu ewolucyjnego, który nie wymaga dodatkowych informacji (np. pochodnych funkcji celu), a jedynie wartości funkcji celu (którą to wartość można również aproksymować) w pracy zaprezentowano ideę algorytmu dwustopniowego. Zastosowanie algorytmu umożliwia efektywne wyznaczanie parametrów redukcji, które umożliwiają minimalizację rzędu modelu zredukowanego obiektu sterowania, charakteryzującego się pożądanym poziomem błędu aproksymacji charakterystyk częstotliwościowych obiektu.

2. REDUKCJA MODELU MATEMATYCZNEGO OBIEKTU STEROWANIA

Ogólnie zadanie redukcji modelu liniowego można przedstawić następująco: na podstawie stabilnego (lub niestabilnego) modelu rzędu n , przedstawionego w przestrzeni stanu (1), należy wyznaczyć model zredukowany rzędu k (2), gdzie $k < n$ taki, aby określona norma błędu aproksymacji $\|y(t) - y_r(t)\|$ przyjmowała wartość minimalną.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) & \dot{x}_r(t) &= \mathbf{A}_r x_r(t) + \mathbf{B}_r(t)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) & y_r(t) &= \mathbf{C}_r x_r(t) + \mathbf{D}_r u(t) \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

gdzie: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{k \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\mathbf{D}_r \in \mathbb{R}^{m \times p}$, p/m – liczba wejść/wyjść modelu matematycznego.

Redukcja modelu jest związana z jego uproszczeniem, w wyniku którego zmniejsza się liczebność zmiennych stanu. Nie jest ona operacją jednoznaczną, dlatego też istnieje cały szereg technik pozwalających na przeprowadzenie redukcji modelu złożonego [1, 3, 5, 9]. Duże znaczenie praktyczne osiągnęły metody bazujące na dekompozycji SVD [1], np. metoda **BTA** (ang. *Balanced Truncation Approximation*) wykorzystująca teorię zrównoważonej realizacji modelu. Umożliwia ona proste wydzielenie części dominującej modelu oraz jego redukcję poprzez „obcięcie” macierzy opisujących dynamikę modelu w przestrzeni stanów [1]. Szczególnie użyteczne są jej uogólnienia – metoda **FW** (ang. *Frequency Weighted*) [1, 9], **FD** (ang. *Frequency Domain*) [1, 3, 9] oraz **TLBT** (ang. *Time Limited Balanced Truncation*) [1, 3, 9] wprowadzające funkcje wagowe, które umożliwiają znaczną zmianę właściwości modelu zredukowanego ze względu na wybrane parametry redukcji. Przy odpowiednim dobraniu funkcji wagowych metody te umożliwiają znaczne zmniejszenie błędów aproksymacji dla zadanego przedziału częstotliwości. Jest to szczególnie istotne podczas redukcji złożonych modeli obiektów sterowania, gdyż charakteryzują się one określonym zakresem adekwatności (dla modeli liniowych określa się ją poprzez podanie maksymalnej częstotliwości), dla którego model powinien poprawnie aproksymować charakterystyki częstotliwościowe obiektu.

Ocena zredukowanych modeli matematycznych obiektów sterowania wymaga wprowadzenia odpowiednich miar błędu aproksymacji. Ze względu na ograniczony zakres adekwatności modelu zredukowanego miary te powinny określać wartość błędu aproksymacji wyłącznie dla ograniczonego przedziału częstotliwości. Metody redukcji, bazujące na dekompozycji SVD, umożliwiają ‘a priori’ oszacowanie normy \mathcal{H}_∞ błędu aproksymacji modelu zredukowanego. Nie istnieją jednak żadne zależności analityczne, które umożliwiałyby oszacowanie wartości błędu aproksymacji dla określonego zakresu częstotliwości. Ze względu na ograniczony zakres adekwatności oraz znaczne różnice wartości modułów transmitancji dla poszczególnych torów modelu, w pracach [9, 11] dla celów oceny jakości aproksymacji modeli zredukowanych obiektów sterowania typu **MIMO** wprowadzono miarę średniokwadratowego względnego błędu aproksymacji:

$$\Delta_6 = \sqrt{\frac{1}{pmN} \sum_{i=1}^N \sum_{x=1}^p \sum_{y=1}^m \left(\frac{|G_{(x,y)}(j\omega_i) - G_r(x,y)(j\omega_i)|}{|G_{(x,y)}(j\omega_i)|} \right)^2} \quad (3)$$

gdzie: p, m – liczba wejść/wyjść modelu, N – liczba punktów aproksymacji, $G_{(x,y)}$ – transmitancja modelu pomiędzy wejściem x a wyjściem y modelu.

Zadaniem poprawnie przeprowadzonej operacji redukcji jest wyznaczenie modelu zredukowanego o jak najniższym rzędzie, który będzie się charakteryzował określonym poziomem błędu aproksymacji dla zadanego zakresu adekwatności. Dla metod **FW**, **FD** czy **TLBR** poważnym problemem praktycznym stanowi wybór odpowiedniego algorytmu doboru

funkcji wagowych ze względu na występowanie znacznej liczby minimów lokalnych funkcji błędu aproksymacji [9].

3. ALGORYTM EWOLUCYJNY W ZASTOSOWANIU DO OPTIMALIZACJI PARAMETRÓW REDUKCJI

Na podstawie przedstawionych w pracy [9] eksperymentów dla modeli podsystemów parownika kotła energetycznego, dla celów wyznaczenia modeli zredukowanych obiektów sterowania, zaproponowano dobór funkcji wagowych z zastosowaniem algorytmu ewolucyjnego (AE). W celu zwiększenia efektywności przeszukiwania dziedziny rozwiązań zaproponowano połączenie zalet strategii ewolucyjnych jedno- oraz wielopunktowych [2]. Przedstawiony algorytm optymalizacji parametrów redukcji charakteryzuje się zmienną liczebnością populacji [9]. Dokładną wartość ekstremum można wyznaczyć poprzez zastosowanie dodatkowej optymalizacji lokalnej, np.: metodę Nelder-Mead simplex dostępną w pakiecie MATLAB/*Simulink*.

Jednym z poważnych problemów optymalizacji za pomocą AE jest sformułowanie odpowiednich kryteriów zatrzymania algorytmu. Zwiększanie liczby iteracji algorytmu zwiększa prawdopodobieństwo wyznaczenia wartości ekstremum globalnego, jednak jest to związane ze wzrostem nakładów obliczeniowych. Każda operacja wyznaczenia funkcji przystosowania wymaga wykonania operacji redukcji, której koszt obliczeniowy rośnie proporcjonalnie do trzeciej potęgi rzędu modelu pierwotnego. Dla komputera klasy Pentium IV 3GHz czas operacji redukcji modelu o tysiącu zmiennych stanu można szacować na około 100 sec.

Z powodu dużej złożoności obliczeniowej algorytmów redukcji oraz konieczności wykonania znacznej liczby redukcji przez algorytm optymalizacji czas wyznaczenia parametrów redukcji może sięgać wielu dziesiątek godzin. Ponadto algorytmu ewolucyjnego nie można traktować jako algorytmu optymalizacji w ścisłym znaczeniu. Realizuje on proces adaptacji, co oznacza, że głównym celem algorytmu jest znalezienie rozwiązania lepszego od dotychczas uzyskanego [2, 4]. Nie można zagwarantować, że wynikiem tego procesu będzie znalezienie najlepszego rozwiązania. Ze względu na element losowości ocena uzyskanych wyników wymaga wykonania wielu niezależnych uruchomień algorytmu, a następnie ich analizy statystycznej, co dodatkowo znacznie zwiększa efektywny czas uzyskania rzetelnych wyników.

Zastosowanie metod redukcji bazujących na dekompozycji SVD dla celów redukcji modeli o dużej złożoności wymaga zastosowania algorytmów Lapunowa, które umożliwiają bezpośrednie wyznaczenie dekompozycji Choleskiego gramianów (np. algorytm Hammarlinga). Algorytm ten wymaga jednak $25n^3$ operacji zmiennoprzecinkowych. W celu zmniejszenia złożoności obliczeniowej gramiany można aproksymować z zastosowaniem iteracyjnych algorytmów niskiego rzędu (ang. low-rank) bazujących na wyznaczeniu podprzestrzeni Kryłowa [6], metodach ADI (ang. alternating direction implicate) [6, 7, 8] lub *Smith* [7, 8]. Zastosowane w przyborniku LYAPACK [7] algorytmy niskiego rzędu nie gwarantują jednak uzyskania poprawnej aproksymacji gramianów, a ponadto ze względu na konieczność wykonania wielu iteracji algorytmu o złożoności proporcjonalnej do drugiej potęgi rzędu modelu, znaczącego przyspieszenia obliczeń można się spodziewać wyłącznie dla modeli o bardzo wysokim rzędzie ($>10^4$ zmiennych stanu).

4. DWUSTOPNIOWY ALGORYTM OPTYMALIZACJI PARAMETRÓW REDUKCJI

Algorytmy ewolucyjne, przetwarzając populacje rozwiązań, nie wymagają dodatkowych informacji o funkcji celu. Dodatkowo algorytm nie traci właściwości adaptacji, gdy wartość funkcji celu jest jedynie szacowana. Dla modeli dynamicznych o dużej złożoności zaproponować można algorytm dwustopniowy, który wyznacza parametry metod redukcji na podstawie oszacowanej wartości błędu aproksymacji. Wartość funkcji celu wyznacza się na podstawie błędu aproksymacji wstępnego modelu pierwotnego modelu, który aproksymuje właściwości modelu pierwotnego. Wstępną aproksymację modelu pierwotnego można uzyskać na dwa sposoby:

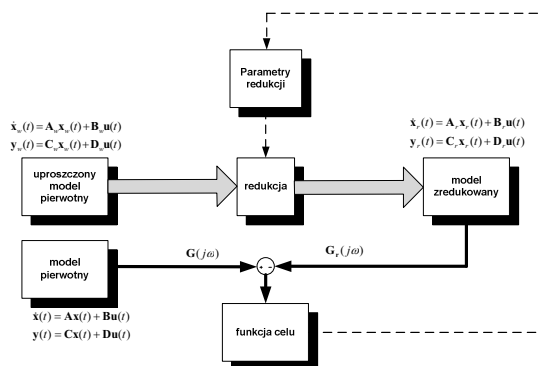
- podczas procesu modelowania poprzez zwiększenie siatki dyskretyzacji, pominięcie części modelowanych zjawisk lub uproszczenie ich opisu matematycznego,
- poprzez wstępną redukcję modelu pierwotnego.

Podstawową zaletą takiego podejścia jest szybkość uzyskania wyniku, gdyż pojedyncze wyznaczenie funkcji przystosowania trwa wielokrotnie krócej. Algorytm przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Algorytm dwustopniowy

1. Wyznaczenie wstępnego modelu pierwotnego (rzęd modelu $n \gg n_p \gg k$),
2. Dobór parametrów redukcji z zastosowaniem AE o zmiennej populacji na podstawie oszacowanej wartości funkcji celu (rys. 1),
3. Wyznaczenie dokładnej wartości ekstremum funkcji błędu aproksymacji poprzez zastosowanie optymalizacji parametrów redukcji algorytmem lokalnego przeszukiwania,
4. Wyznaczenie modelu zredukowanego w wyniku redukcji modelu pierwotnego z zastosowaniem uzyskanych parametrów redukcji,

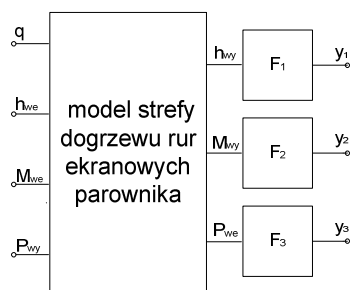
Algorytm taki nie jest oczywiście pozbawiony wad, gdyż parametry metod redukcji wyznaczone są na podstawie modelu uproszczonego, którego charakterystyki aproksymują właściwości modelu pierwotnego. Oznacza to, że zależność błędu aproksymacji w funkcji parametrów metod redukcji może różnić się zarówno liczbą ekstremów lokalnych (część z ekstremów może nie istnieć dla modelu wstępnego lub mogą występować dodatkowe), jak również ich położeniem.



Rys. 1. Algorytm wyznaczenia wartości funkcji celu dla algorytmu dwustopniowego

5. OPTIMALIZACJA PARAMETRÓW REDUKCJI DLA MODELU STREFY DOGRZEWU RUR EKRANOWYCH PAROWNIKA

Właściwości algorytmu dwustopniowego przedstawiono na podstawie optymalizacji parametrów redukcji zlinearyzowanego modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika BP-1150 dla metody **FW** z filtrami dolnoprzepustowymi Butterwortha dołączonymi do wyjść modelu (rys. 2). Model ten otrzymano w wyniku dyskretyzacji, a następnie linearyzacji (dla obciążenia kotła równego 100%) zestawu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach (model klasy \overline{KSDL}), którymi opisano strefę dogrzewu parownika kotła energetycznego. Model opisany jest zestawem 2250 równań liniowych oraz posiada 4 wejścia (q - względne obciążenie cieplne [], h_{we} - entalpia wody wlotowej [kJ/kg], M_{we} - masowy przepływ wody na wlocie [kg/m^2s], P_{wy} - ciśnienie wylotowe ze strefy dogrzewu [kPa]) oraz 3 wyjścia (h_{wy} - entalpia wody na wylocie ze strefy dogrzewu [kJ/kg], M_{wy} - masowy przepływ wody na wylocie ze strefy dogrzewu [kg/m^2s], P_{we} - ciśnienie wlotowe do strefy dogrzewu [kPa]). Szczegóły modelu matematycznego przedstawione zostały w pracach [10, 11].

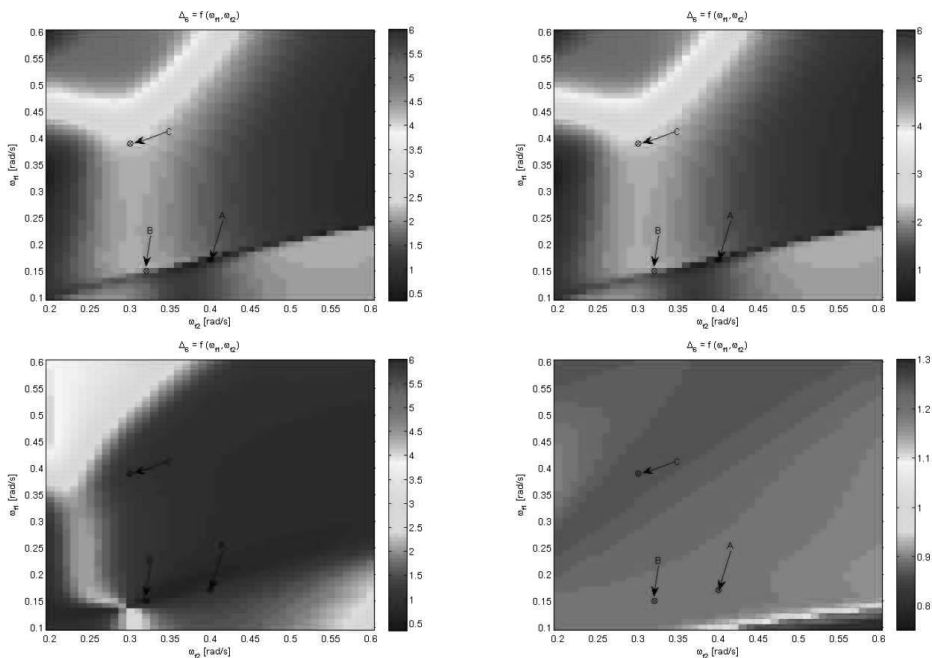


Rys. 2. Model MIMO strefy dogrzewu wraz dołączonymi filtrami wagowymi

Na rys. 3 przedstawiono błąd aproksymacji w funkcji parametrów filtrów wagowych dla metody **FW** wokół jednego z wyznaczonych minimów. Błąd aproksymacji modelu zredukowanego przedstawiono w funkcji częstotliwości granicznej filtrów ω_{f1} oraz ω_{f2} (pozostałe parametry redukcji przyjmują wartości: $n_{f1}=9$, $n_{f2}=4$, $n_{f3}=16$, $\omega_{f3}=0,688$ [rad/s]). Wykreślono charakterystyki błędu aproksymacji (minima poszczególnych funkcji błędu aproksymacji zaznaczono) dla modelu pierwotnego oraz trzech uproszczonych modeli pierwotnych:

- (A) model rzędu $n_p=300$ uzyskany w wyniku redukcji modelu pierwotnego metodą **BTA** ($\Delta_6=2,374e-009$),
- (B) model rzędu $n_p=50$ uzyskany w wyniku redukcji modelu pierwotnego metodą **FW** z wagą wyjściową w postaci trzech dolnoprzepustowych filtrów Butterwortha o parametrach $n_f=3$, $\omega_f=20$ [rad/s] ($\Delta_6=0,6678$),
- (C) modelu rzędu $n_p=300$ uzyskany w wyniku dyskretyzacji, a następnie linearyzacji modelu klasy \overline{KSDL} na 20 sekcji o parametrach skupionych ($\Delta_6=0.8601$).

Uproszczone modele pierwotne A oraz B zostały dobrane tak, aby jeden z nich charakteryzował się identycznym rzędem modelu, natomiast drugi porównywalnym poziomem względnego błędu aproksymacji jak model C.



Rys. 3. Błąd aproksymacji modelu zredukowanego w funkcji ω_{n1} oraz ω_{n2} dla (a) modelu pierwotnego (b) uproszczonego modelu pierwotnego A , (c) modelu B , (d) modelu C

Dla modelu strefy dogrzewu rur ekranowych parownika uproszczone modele pierwotne A oraz B z dobrym przybliżeniem aproksymują charakterystykę błędu aproksymacji w funkcji parametrów redukcji. Zastosowanie wstępnego modelu pierwotnego, uzyskanego w wyniku zmniejszenia liczby sekcji modelu klasy \overline{KSDL} , spowodowało jednak pojawienie się znacznych różnic w charakterystykach błędu aproksymacji.

Zastosowanie uproszczonego modelu pierwotnego, który w niedostateczny sposób aproksymuje właściwości modelu pierwotnego, może powodować wyznaczenie parametrów redukcji, które znacznie różnią się od optymalnych. Wykorzystanie tych parametrów podczas redukcji modelu pierwotnego może powodować, że model zredukowany będzie charakteryzował się znacznie większym błędem aproksymacji niż szacowana wartość funkcji celu na podstawie uproszczonego modelu pierwotnego. Przykładem może być model C , na podstawie którego wyznaczono parametry redukcji oraz szacowano błąd aproksymacji $\Delta_6=0,8618$. Zastosowanie wyznaczonych parametrów do redukcji modelu pierwotnego spowodowało jednak uzyskanie modelu charakteryzującego się prawie trzykrotnie większym błędem aproksymacji $\Delta_6=2,386$ (tab. 2).

Ograniczenie wpływu jakości aproksymacji uproszczonego modelu pierwotnego na wyniki redukcji możliwe jest poprzez połączenie algorytmu dwustopniowego z tradycyjnym AE lub algorytmem przeszukiwania lokalnego. Zadaniem pierwszego z algorytmów jest wyznaczenie wstępnych wartości parametrów redukcji na podstawie uproszczonego modelu pierwotnego. Uzyskane parametry służą jako punkt startowy kolejnego algorytmu optymalizacji. Drugi z algorytmów bazuje na redukcji modelu pierwotnego, więc umożliwia wyznaczenie dokładnej wartości ekstremum funkcji błędu aproksymacji. W celu zmniejszenia kosztu obliczeń całego algorytmu konieczne jest nałożenie ostrych ograniczeń na liczbę kroków drugiego z algorytmów.

W tabeli 2 przedstawiono wyniki optymalizacji za pomocą algorytmu dwustopniowego (DA) oraz jego połączenia z algorytmem Nelder-Mead simplex (NMs) bazującego na wyznaczeniu ekstremum funkcji błędu aproksymacji z zastosowaniem redukcji modelu pierwotnego. Przedstawiono wyniki dla 20 niezależnych uruchomień algorytmu dla jednakowych populacji punktów startowych dla każdego z testowanych modeli. Algorytmy posiadały również identyczne kryteria zatrzymania: maksymalna liczba redukcji wykonana przez AE = 500, maksymalna liczba redukcji bez poprawy uzyskanego wyniku = 50, maksymalna liczba kroków algorytmu Nelder-Mead simplex = 50. Czas uzyskania modelu zredukowanego nie uwzględnia kosztu obliczeń koniecznych do wyznaczenia wstępnego modelu pierwotnego (modelu A, B oraz C).

Tabela 2. Wyniki optymalizacji parametrów redukcji modelu strefy dogrzewu rur ekranowych

rodzaj algorytmu	Model pierwotny	Model A		Model B		Model C	
	AE	DA	DA + NMs	DA	DA + NMs	DA	DA + NMs
Δ_6 – najlepszy wynik	0.1830	0.1932	0.1832	0.3822	0.2534	2.386	0.2117
Δ_6 – mediana	0.2708	0.2995	0.2746	2.161	0.4213	4.560	0.4488
Koszt symulacji – liczba redukcji modelu pierwotnego (mediana)	311	1	50	1	50	1	50
Koszt symulacji – liczba redukcji Wstępnego modelu pierwotnego (mediana)	0	255	255	255	255	296	296
Czas uzyskania modelu zredukowanego [min]	3772	23,4	618	12,6	607	25,2	619,4

6. WNIOSKI

Na podstawie przedstawionych wyników optymalizacji można stwierdzić, że dobrze dobrany wstępny model pierwotny (model A) umożliwia uzyskanie praktycznie identycznych wyników redukcji jak przy zastosowaniu modelu pierwotnego, przy jednoczesnym znacznym ograniczeniu czasu trwania algorytmu ewolucyjnego (z 63 godzin do 24 minut). Połączenie algorytmu dwustopniowego z algorytmem bazującym na redukcji modelu pierwotnego o ograniczonej liczbie operacji wyznaczenia funkcji celu, zapewnia natomiast uzyskanie poprawnych wyników redukcji, nawet w przypadku gdy algorytm dwustopniowy szacuje wartość funkcji celu ze znacznym błędem. Należy zauważyć, że zastosowanie takiego połączenia umożliwiło uzyskanie modeli zredukowanych, których mediana błędu aproksymacji miała wartość niższą niż błąd aproksymacji zastosowanego wstępnego modelu pierwotnego. Gwarancję uzyskania poprawnych wyników redukcji daje oczywiście wybór wstępnego modelu pierwotnego charakteryzującego się znacznie niższym błędem aproksymacji oraz szerszym zakresem adekwatności niż poszukiwany model zredukowany.

Dla modeli o dużej złożoności, a w szczególności uzyskanych z pomocą metod elementów skończonych, kolejne wartości własne gramianów (σ_i) zazwyczaj bardzo szybko maleją. Umożliwia to w prosty sposób uzyskanie znacznej redukcji rzędu modelu pierwotnego (np.: z 2250 do 300 zmiennych stanu) przy minimalnym błędzie aproksymacji z zastosowaniem np.: metody BTA (np. model A). Charakterystyki częstotliwościowe wyznaczonego w ten sposób wstępnego modelu pierwotnego, w zakresie znacznie szerszym niż zakres adekwatności, praktycznie nie różnią się od charakterystyk modelu pierwotnego. Zastosowanie tego modelu w algorytmie dwustopniowym umożliwia natomiast znaczne skrócenie czasu wyznaczania optymalnych parametrów redukcji praktycznie bez straty dokładności obliczeń.

Przedstawiony algorytm dwustopniowy oraz algorytm ewolucyjny o zmiennej populacji dostępny jest w przyborniku eAMOR dla pakietu MATLAB/*Simulink* (dostępny na stronie www.m.rydel.po.opole.pl)

LITERATURA

1. Antoulas A.: Approximation of large-scale dynamical system. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 2005.
2. Arabas J.: Wykłady z algorytmów ewolucyjnych. Warszawa: WNT, 2001.
3. Gawronski. W., Juang J.: Model reduction in limited time and frequency intervals. "Int. J. System Sci." 1990, Vol. 21, No.2, p. 349-376.
4. Goldberg D.: Algorytmy genetyczne i ich zastosowanie. Wyd.3. Warszawa: WNT, 2003.
5. Krajewski W.: Wybrane metody wyznaczania optymalnych modeli uproszczonych. Warszawa: Akad. Ofic. Wyd. EXIT, 2006.
6. Li J. R., WHITE J.: Low-rank solution of Lyapunov equations. "SIAM Review" 2004, Vol. 46, No. 4, p. 693-713.
7. Penzl T.: Lyapack – a Matlab toolbox for large Lyapunov and Riccati equations. Model Reduction Problems and Linear-Quadratic Optimal Control Problem. Users Guide 1999.
8. Penzl T.: Algorithms for model reduction of large dynamical systems. "Linear Algebra and its Applications" 2006, Vol. 415, p. 322-343.
9. Rydel M., Stanisławski W.: Optymalizacja parametrów metod redukcji bazujących na dekompozycji SVD dla celów redukcji liniowych modeli obiektów sterowania typu MIMO. „Metody Informatyki Stosowanej” 2010, Vol. 24, nr 3, s.197-220.
10. Stanisławski W.: Modelowanie i symulacja komputerowa parowników przepływowych kotłów energetycznych. Opole 2001. Studia i monografie z.124.
11. Stanisławski W., Rydel M.: Hierarchical models of complex plants on basis of power boiler example. "Archives of Control Sciences" 2010, Vol. 20(LVI), No. 4, p. 381-416.

REDUCED MODELS OPTIMIZATION WITH TWO-STAGE ALGORITHMS APPLICATION

Summary. The paper presents issues connected with the reduction of complex linear models of MIMO type control objects. Optimization of the reduction parameters using two-stage algorithms has been suggested. Reduction results of the models of one-phase zone evaporating tubes of BP-1150 once-through boiler were described in the article.