

DWUKRYTERIALNA OPTIMALIZACJA BELEK CIENKOŚCIENNYCH KSZTAŁTOWANYCH NA ZIMNO O WYBRANYCH PRZEKROJACH OTWARTYCH

MARCIN RODAK

*Institut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Poznańska
e-mail: marcin.rodak@put.poznan.pl*

Streszczenie. W pracy przedstawiono dwukryterialną optymalizację belek cienkościennych o wybranych przekrojach poprzecznych. Za cząstkowe funkcje kryterialne obrano pole przekroju poprzecznego i maksymalne ugięcie belek. Zmiennymi decyzyjnymi były parametry związane z wymiarami poprzecznymi profili. W modelu optymalizacyjnym wzięto pod uwagę ograniczenia związane ze statecznością, wytrzymałością, sztywnością belek oraz ograniczenia geometryczne. W wyniku optymalizacji otrzymano zbiory rozwiązań Pareto-optimalnych, które przedstawiono na wykresach.

1. WSTĘP

Belki cienkościenne kształtowane na zimno mają szerokie zastosowanie w przemyśle maszynowym i budownictwie. Rozwój nowych zastosowań oraz rosnące zapotrzebowanie na tego typu konstrukcje wynika przede wszystkim z prostej technologii wytwarzania, łatwości montażu, a także korzystnej relacji pomiędzy przenoszonymi obciążeniami a ich masą. Dla tych konstrukcji istnieje możliwość uzyskania praktycznie dowolnego kształtu przekroju poprzecznego belki. Zdolność do przenoszenia stosunkowo dużych obciążeń jest w większości przypadków ograniczona nie wytrzymałością materiału, a głównie utratą stateczności przez belkę. Ze względu na wysoki stosunek wymiarów poprzecznych do grubości ścianek w profilach kształtowanych na zimno występują lokalne postacie wybożenia. Stąd przy projektowaniu belek cienkościennych ograniczenia związane z utratą stateczności odgrywają decydującą rolę. Główne kierunki badań dotyczących tej tematyki przedstawili między innymi Davies [1], Ghersi i inni [2], Hancock [3].

Belki kształtowane na zimno ze względu na swoje zalety dają projektantowi dużą elastyczność w doborze kształtu przekroju poprzecznego. Wybór taki musi być racjonalny i wynikać z pewnych kryteriów, takich jak maksymalne wykorzystanie własności użytkowych konstrukcji przy jak najniższych kosztach produkcji. Kryterium charakteryzującym zastosowania konstrukcji mogą być własności wytrzymałościowe, a więc zapewnienie odpowiedniej sztywności konstrukcji. Koszty produkcji mają aspekt ekonomiczny i mogą być częściowo wyrażone przez masę konstrukcji. Rozwiązanie zagadnień tego typu możliwe jest przy wykorzystaniu metod optymalizacji wielokryterialnej. Dwukryterialną optymalizację belek cienkościennych w swoich pracach przedstawili Kasperska i inni [4, 5], Magnucki i Ostwald [6, 7], Ostwald i Magnucki [8], Ostwald i inni [9], Ostwald i Rodak [10, 11, 12].

W pracy rozwiązano zadanie dwukryterialnej optymalizacji belek swobodnie podpartych na obu jej końcach o następujących profilach: ceowych z zagiętymi półkami oraz dwuteowych z podwójnymi lub zagiętymi półkami. Belki były poddane czystemu zginaniu, obciążeniu siłą poprzeczną równomiernie rozłożoną na jej długości lub siłą skupioną przyłożoną w środku jej długości. Założono, że siły poprzeczne przykładane są do osi środków ścinania profili. Za kryteria optymalizacyjne obrano pole powierzchni poprzecznej przekroju oraz jej maksymalne ugięcie. Zmiennymi decyzyjnymi były wymiary geometryczne przekroju oraz grubość i szerokości poszczególnych jej ścianek. Ze względu na cienkościenność konstrukcji znaczącymi ograniczeniami były warunki stateczności globalnej i lokalnej. Kolejnym ograniczeniem był warunek wytrzymałościowy. Ważnymi ograniczeniami były warunki geometryczne szczególnie przy minimalizacji maksymalnego ugięcia belki. Zagadnienie rozwiązano za pomocą znormalizowanej metody ograniczeń normalnych (ang. normal constraint method) zaproponowanej przez Messaca i innych [13].

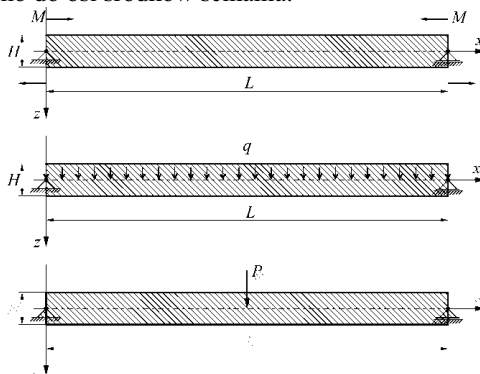
Analizę numeryczną przeprowadzono dla różnych wartości obciążeń i długości belek. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci wykresów.

2. MODELE BELEK CIENKOŚCIENNYCH O PRZEKROJACH OTWATYCH

W pracy optymalizowano belki cienkościenne kształtowane na zimno swobodnie podparte obciążone (rys. 1):

- dwoma momentami zginającymi przyłożonymi na obu końcach belki, przeciwnie skierowanymi, o wartości M - pierwszy przypadek obciążenia,
- siłą poprzeczną równomiernie rozłożoną na długości belki o wartości q - drugi przypadek obciążenia,
- skupioną siłą poprzeczną przyłożoną w środku długości belki o wartości P - trzeci przypadek obciążenia Dla tego obciążenia założono, że w przekroju, w którym przyłożona jest siła skupiona znajduje się żebro zapobiegające lokalnemu wyboczeniu ścianek.

Siły poprzeczne przyłożono do osi środków ścinania.

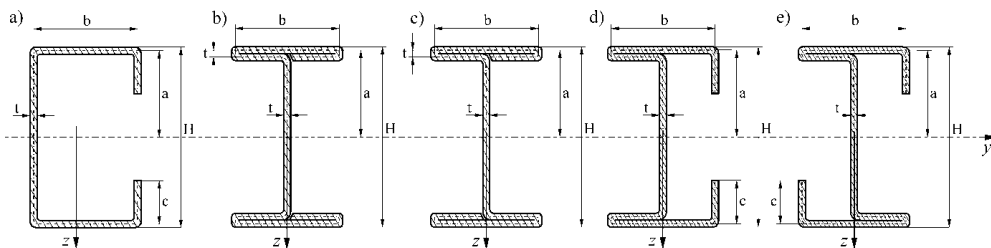


Rys. 1. Schematy obciążenia

Wybrano przekroje poprzeczne przedstawione na rys. 2:

- a) ceownik z zagiętymi półkami,
- b) monosymetryczny dwuteownik z podwójnymi półkami,

- c) antysymetryczny dwuteownik z podwójnymi półkami,
- d) monosymetryczny dwuteownik z zagiętymi półkami,
- e) antysymetryczny dwuteownik z zagiętymi półkami.



Rys. 2. Przekroje poprzeczne belek kształtowanych na zimno

3. MODEL OPTIMALIZACYJNY

3.1. Zmienne decyzyjne i kryteria optymalizacyjne

Zmiennymi decyzyjnymi były wielkości związane z wymiarami poprzecznymi belek a, b, c, t (rys. 2). Parametr c nie był zmienną decyzyjną w przypadku dwuteowników z podwójnymi półkami, a także w przypadku antysymetrycznego dwuteownika z zagiętymi półkami. W ostatnim przypadku wynikało to z założenia $I_{yz} = 0$, gdzie I_{yz} to dewiacyjny moment bezwładności przekroju poprzecznego. Warunek ten pozwolił wyrugować zmienną c z modelu optymalizacyjnego dla tego profilu.

Za pierwsze kryterium optymalizacyjne obrano pole przekroju poprzecznego związane z masą lub częściowo z kosztem konstrukcji

$$f_1(x) = A,$$

gdzie x to wektor zmiennych decyzyjnych.

Drugą cząstkową funkcją kryterialną było maksymalne ugięcie belki

$$f_2(x) = k \cdot \frac{M_{\max} \cdot L^2}{EI_y},$$

gdzie $k = 1/8$ i $M_{\max} = M$ dla czystego zginania, $k = 5/48$ i $M_{\max} = 1/8 qL^2$ dla siły równomiernie rozłożonej q i $k = 1/12$ i $M_{\max} = 1/4 P \cdot L$ dla siły skupionej P, natomiast E - moduł Younga, I_y - moment bezwładności.

3.2. Ograniczenia

Zbiór ograniczeń składał się z następujących warunków:

- ograniczenia geometryczne

$$a \geq 2t, \quad b \geq 2t, \quad c \geq 0, \quad t \geq 0$$

$$H = 2a + t \leq H_{\max}, \quad b + t \leq H_{\max}, \quad c \leq a, \quad t \leq t_{\max}.$$

W przypadku antysymetrycznego dwuteownika z zagiętymi półkami ograniczenie związane z szerokością półki było silniejsze ze względu na założenie $I_{yz} = 0$, tzn.

$$b + 3t \leq H_{\max},$$

- ograniczenie wytrzymałościowe

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xs}^2} \leq \sigma_{\text{dop}},$$

gdzie σ_x , τ_{xs} - naprężenia normalne i styczne, a σ_{dop} naprężenia dopuszczalne,

- ograniczenie związane ze statecznością globalną (Mohri i inni [14])

$$M_{\text{max}} \leq M_{\text{GB}},$$

$$\text{gdzie } M_{\text{GB}} = C_{\text{GB}} \frac{1}{n_g} \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z \left[GI_s + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI_\omega \right]}$$

oraz $C_{\text{GB}} = 1,0$ dla czystego zginania, $C_{\text{GB}} = 1,132$ dla siły równomiernie rozłożonej, $C_{\text{GB}} = 1,366$ dla siły skupionej i $n_g = 1,8$ - współczynnik bezpieczeństwa, E, G - moduł Younga i Kirchhoffa, I_z - moment bezwładności, I_ω - wycinkowy moment bezwładności, I_s - moment bezwładności przekroju na skręcanie,

- ograniczenia związane ze statecznością lokalną.

$$M_{\text{max}} \leq M_{\text{LB}},$$

gdzie $M_{\text{LB}} = \min\{M_{\text{LBW}}, M_{\text{LBF}}, M_{\text{LBL}}, M_{\text{LBD}}\}$ oraz $M_{\text{LBW}}, M_{\text{LBF}}, M_{\text{LBL}}, M_{\text{LBD}}$ to odpowiednio maksymalne momenty krytyczne na lokalne wyoboczenie środnika, górnej ścianki półki, zagięcia oraz całej półki (ang. distortional buckling). W pierwszych dwóch przypadkach ścianki belki potraktowano jako płyty przegubowo podparte na czterech krawędziach. Zagięcie potraktowano jako płytę podpartą przegubowo na trzech krawędziach i na czwartym swobodną. W przypadku czystego zginania otrzymano klasyczne wyniki znane z literatury, np. [15]. W pozostałych przypadkach obciążenia dla dostatecznie smukłych belek wartości naprężeń krytycznych nieznacznie się różniły od otrzymanych dla czystego zginania.

W ostatnim rozważanym przypadku wyoboczenia półkę potraktowano jako swobodnie podpartą na krawędzi jej połączenia ze środnikiem oraz na krawędziach znajdujących się na końcach belki. Rozwiązania dla momentów krytycznych we wszystkich przypadkach wyoboczenia lokalnego szczegółowo przedstawiono w pracy [8].

- ograniczenie związane z maksymalnym ugięciem belki

$$M_{\text{max}} \leq M_{\text{DC}},$$

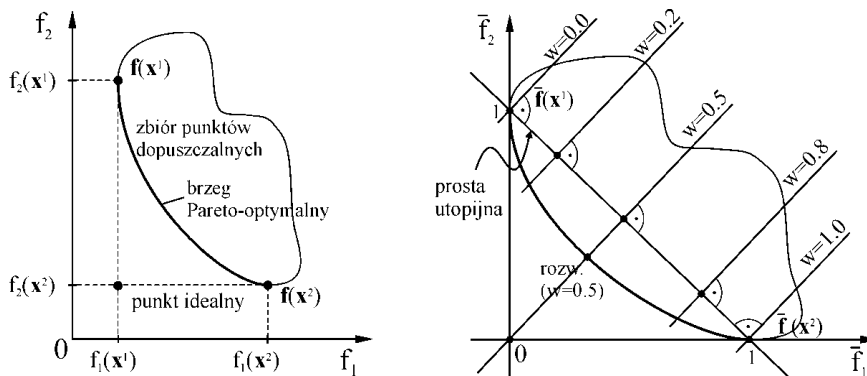
gdzie $M_{\text{DC}} = \frac{1}{k} \frac{EI_y}{L^2} w_{\text{dop}}$, w_{dop} - dopuszczalne ugięcie belki, a wielkości k i M_{max} przyjmowały wartości takie jak w podrozdziale 3.1.

3.3. Algorytm optymalizacyjny

Problem rozwiązano, generując zbiór rozwiązań niezdominowanych w sensie Pareto. Punkty Pareto-optymalne wygenerowano za pomocą znormalizowanej metody ograniczeń normalnych (ang. normalized normal constraint method) zaproponowanej przez Messaca i innych [13]. W porównaniu do klasycznej metody sum ważonych zaproponowana metoda pozwala otrzymać wszystkie punkty niezdominowane, które są równomiernie rozłożone na brzegu Pareto-optymalnym.

Algorytm przebiegał w kilku krokach. Pierwszy etap to optymalizacja cząstkowych funkcji celu, następnie normalizowane były funkcje kryterialne na podstawie otrzymanych wcześniej rozwiązań. Krok drugi to generowanie punktów referencyjnych leżących w przestrzeni

kryterialnej na hiperpłaszczyźnie utopijnej przechodzącej przez rozwiązania cząstkowych funkcji celu. Na podstawie otrzymanych punktów referencyjnych formułowane były dodatkowe ograniczenia. W wyniku optymalizacji jednej z cząstkowych funkcji otrzymywano rozwiązania Pareto- optymalne. Na rys. 3 przedstawiono przebieg algorytmu w przypadku optymalizacji dwukryterialnej.



Rys. 3. Znormalizowana metoda podziału normalnego

Rozwiązania, które otrzymano zaprezentowano w formie

$$\mathbf{f}(x^*(w)) = [f_1(x^*(w)), f_2(x^*(w))]$$

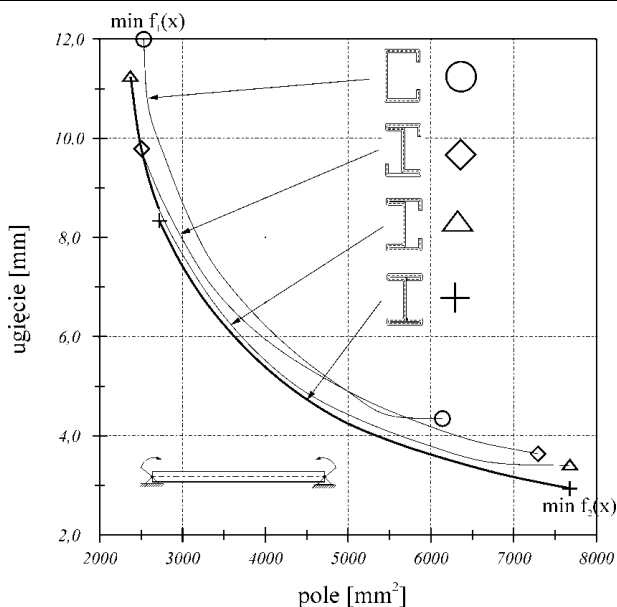
gdzie $w \in \langle 0,1 \rangle$ - współczynnik wagowy określający położenie punktu referencyjnego na prostej utopijnej, $x^* = x^*(w)$ - rozwiązanie problemu dla danego w . Wartość $w = 0.0$ odpowiadała rozwiązaniu przy minimalizacji pierwszej cząstkowej funkcji celu $f_1(x)$, natomiast $w = 1.0$ drugiej $f_2(x)$. Dla współczynników $0 < w < 1$ otrzymywano zbiór rozwiązań niezdominowanych w sensie Pareto.

4. WYNIKI ANALIZY NUMERYCZNEJ

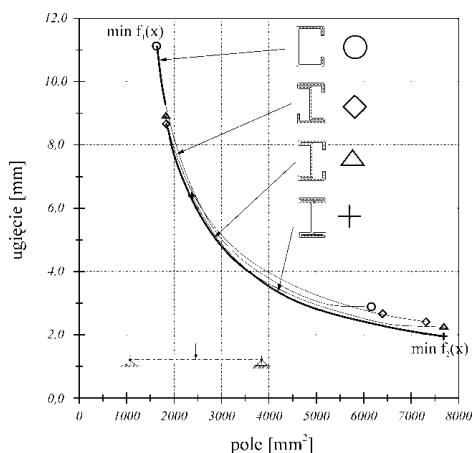
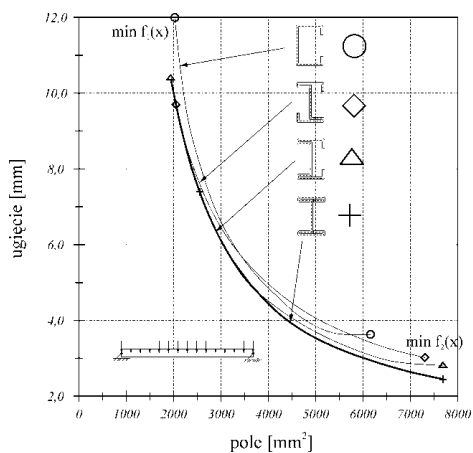
Analizę numeryczną przeprowadzono dla następujących parametrów:

- wysokość belki $H_{\max} = 200,0$ mm,
- długość belki $L = 2,0; 3,0; 4,0$ m,
- grubość ścianek belki $t = 1,0-8,0$ mm,
- właściwości materiału $E = 2,05 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$, $\sigma_{\text{dop}} = 307,5$ MPa,
- obciążenia $M_{\max} = 20,0; 30,0; 40,0$ kN·m,
- dopuszczalne ugięcie belki $w_{\text{dop}} = 0,04$ L.

Na rysunkach 4 i 5 przedstawiono brzegi Pareto- optymalne w przestrzeni kryterialnej dla wszystkich rozważanych profili o długości $L=3,0$ m. Pozwoliło to porównać rozważane przekroje oraz wyznaczyć wspólny brzeg Pareto- optymalny.

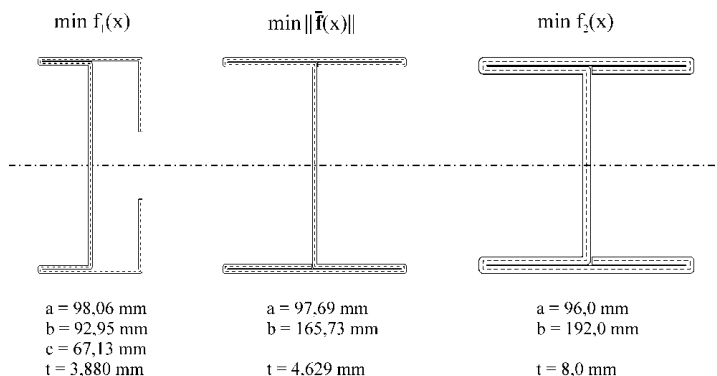


Rys. 4. Brzegi Pareto- optymalne w przypadku czystego zginania ($L=3,0$ m, $M_{\max}=30$ kNm)



Rys. 5. Brzegi Pareto- optymalne w przypadku obciążenia siłą równomiernie rozłożoną oraz siłą skupioną ($L=3,0$ m, $M_{\max}=30$ kNm)

Na rys. 6 przedstawiono optymalne przekroje w przypadku czystego zginania dla belek o długości $L=3,0$ m, gdzie przez $\min f_i(x)$ oznaczono przekrój otrzymany przy minimalizacji "i"-tej cząstkowej funkcji kryterialnej dla $i=1, 2$, natomiast przez $\min \|\bar{f}(x)\|$ rozwiązanie, którego obraz w znormalizowanej przestrzeni kryterialnej leży najbliżej punktu idealnego (początek układu współrzędnych).



Rys. 6. Przekroje optymalne w przypadku czystego zginania
($L=3,0$ mm, $M_{\max}=30$ kNm)

5. WNIOSKI

Z przeprowadzonej analizy numerycznej dla przyjętych parametrów wynikało, że największe znaczenie przy budowaniu modelu optymalizacyjnego miały ograniczenia związane ze statecznością belki oraz geometryczne. Przy minimalizacji pola powierzchni aktywne były te pierwsze, a przy minimalizacji ugięcia belki te ostatnie.

Zauważono, że rozwiązania otrzymane przy minimalizacji pola przekroju, dla których nie był aktywny warunek geometryczny związany z wysokością belki $H \leq H_{\max}$, nie były rozwiązaniami optymalnymi z inżynierskiego punktu widzenia. Wynikało to z faktu, że przy minimalizacji pierwszej funkcji celu dla $H = H_{\max}$ otrzymywano przekroje o nieznacznie większym polu powierzchni poprzecznej, ale znacząco większej sztywności.

Belki mono- i antysymetryczne o przekrojach dwuteowych z podwójnymi półkami z praktycznego punktu widzenia można ze sobą utożsamiać.

Na podstawie otrzymanych wyników (rys. 4, 5) za najlepsze z badanych przekrojów uznano monosymetryczny dwuteownik z zagiętymi półkami oraz dwuteowniki z podwójnymi półkami. Gdy dla projektanta większe znaczenia ma masa belki, to najlepszą belką jest monosymetryczny dwuteownik z zagiętymi półkami lub ceownik z zagiętymi półkami. Gdy natomiast większe znaczenie ma ugięcie belki, to za najlepsze przekroje można uznać profile dwuteowe z podwójnymi półkami.

LITERATURA

1. Davies J.: Recent research advances in cold-formed steel structures. "Journal of Constructional Steel Research" 2000, 55, p. 267-288.
2. Gherzi A., Landolfo R., Mazzolani F.M.: Design of metallic cold-formed thin-walled members. London and New York: Spon Press, 2002.
3. Hancock G.J.: Cold-formed steel structures. "Journal of Constructional Steel Research" 2003, 59, p. 473-487.
4. Kasperska R., Magnucki K., Ostwald M.: Bicriteria optimization of cold-formed thin-walled beams with open cross sections. In: Proceedings of WCSMO6 2005, 29 May-5 June, Rio de Janeiro, Brazil.

5. Kasperska R., Magnucki K., Ostwald M.: Bicriteria optimization of cold-formed thin-walled beams with monosymmetrical open cross sections under pure bending. "Thin-Walled Structures" 2007, 45, p.563-572.
6. Magnucki K., Ostwald M.: Optimal design of open cross sections of cold-formed thin-walled beams. Shen Z.Y. i inni (Eds.): Advances in steel structures. Elsevier, 2005. Vol. 2, p.1311-1316.
7. Magnucki K., Ostwald M.: Optimal design of selected open cross sections of cold-formed thin-walled beams. Poznań: Poznan University of Technology Publishers, 2005.
8. Ostwald M., Magnucki K.: Optymalne projektowanie belek cienkościennych walcowanych na zimno o przekrojach otwartych. Poznań: Comprint Poznan, 2008.
9. Ostwald M., Magnucki K., Rodak M.: Bicriteria optimal design of open cross sections of cold-formed thin-walled beams. "Steel and Composite Structures" 2007, 7, p. 53-70.
10. Ostwald M., Rodak M.: Bicriteria optimization problem of cold-formed thin-walled beams with selected open cross section. Zingoni A.(Eds.): Recent Developments in Structural Engineering, Mechanics and Computation. Rotterdam: Millpress, 2007 (CD-Rom).
11. Ostwald M., Rodak M.: Multicriteria optimization of cold-formed thin-walled beams with generalized open shape. In: Proceedings of Fifth International Conference on Thin-Walled Structures, Brisbane, Australia 2008, p. 509-516.
12. Ostwald M., Rodak M.: Multicriteria optimization of cold-formed thin-walled beams under compression axial load. In: Proceedings of Fifth International Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures CIMS 2008, Sydney, Australia 2008, p. 141-148.
13. Messac A., Ismail-Yahaya A., Mattson C.A.: The normalized normal constraint method for generating the Pareto frontier. "Structural and Multidisciplinary Optimization" 2003, 25, p. 86-98.
14. Mohri F., Brouki A., Roth J.C.: Theoretical and numerical stability analysis of unrestrained mono-symmetric thin-walled beams. "Journal of Constructional Steel Research" 2003, 59, p. 63-90.
15. Timoshenko S. P., Gere J. M.: Teoria stateczności sprężystej. Warszawa: Wyd. Arkady, 1963.

BI-CRITERIA OPTIMIZATION OF THIN-WALLED, COLD-FORMED BEAMS WITH SELECTED OPEN CROSS-SECTIONS

Summary. Bi-criteria optimization of thin-walled beams with different cross-sections is presented in this paper. The area of cross-sections and maximum deflection of a beam are objective functions. The geometric parameters of cross-sections are design variables. Stability, strength, technological and geometrical constraints were taken into account. The optimization problem is formulated and solved using Pareto concept of optimality. Results are presented in figures.