

## WYTRZYMAŁOŚĆ I STATECZNOŚĆ BELEK - SŁUPÓW TRÓJWARSTWOWYCH

KRZYSZTOF MAGNUCKI

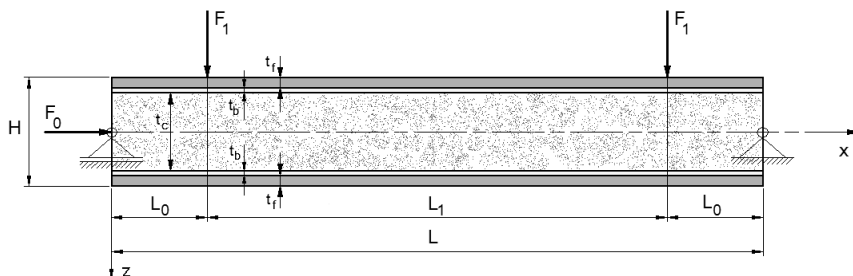
*Institut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Poznańska  
e-mail: krzysztof.magnucki@put.poznan.pl*

Streszczenie. Przedmiotem pracy są belki-słupy trójwarstwowe poddane zginaniu lub osiowemu ściskaniu. Przedstawiono dwa modele belki-słupa trójwarstwowego. Równania równowagi dla obu modeli zapisano, korzystając z zasady stacjonarności całkowitej energii potencjalnej. Wyznaczono ugięcia oraz naprężenia w badanych belkach. Sformułowano i rozwiązano problem wyoboczenia ogólnego słupów. Wyniki rozwiązań analitycznych porównano z badaniami numerycznymi MES, a także z eksperymentem dla wyoboczenia ogólnego.

### 1. WPROWADZENIE

Teoria oraz technologia konstrukcji trójwarstwowych rozwijana jest intensywnie od połowy dwudziestego wieku. E. Reissner w 1948 roku sformułował opis matematyczny skończonych ugięć płyt trójwarstwowych. F. Plantema w 1966 r., A.S. Wolmir w 1967 r., H.G. Allen w 1969 r., Grigoluk i Čulkov w 1973 r. oraz Romanów w 1995 r., a współcześnie Carrera [2, 3], Magnucki i Ostwald (red.) [15], Michalak [21] oraz Vinson [25] zebrali i opisać problemy wytrzymałości i stateczności tych konstrukcji. Wyniki szczegółowych badań w tym zakresie w ostatnich latach przedstawili Birman [1], Chakrabarti i inni [4], Fagerberg i Zenkert [5], Hadi [7], Jasion i inni [8, 9], Koissin i inni [10], Lopatin i Morozov [11], Magnucka-Blandzi i Magnucki [12], Magnucka-Blandzi [13, 14], Magnucki i inni [16, 17, 18, 19], Meyer-Piening [20], Paczos i inni [22], Szyk i inni [24] oraz Woźniak [26]. Rdzeń konstrukcji trójwarstwowych pełni funkcję podłoża dla okładzin. Klasyczny model Winklera podłoża sprężystego nie jest wystarczający w badaniu miejscowego wyoboczenia-marszczenia okładzin tych konstrukcji. Podobnie klasyczny model konstrukcji trójwarstwowej (dwie okładziny i rdzeń) nie jest wystarczający w badaniu wytrzymałości konstrukcji klejonych, których opis przedstawił Godzimirski [6]. Badania teoretyczne w pracy ukierunkowano na uogólnienie modelu belki trójwarstwowej – sandwiczowej.

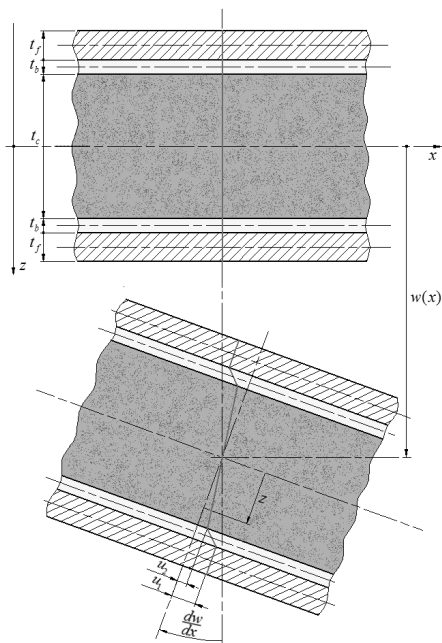
Przedmiotem pracy są klejone belki trójwarstwowe z rdzeniem z pianki metalowej. Okładziny z rdzeniem połączone są cienką warstwą kleju o grubości  $t_b$ . Pozostałe grubości wynoszą okładzin  $t_f$  a rdzenia  $t_c$ . Zatem grubość całkowita trójwarstwowej belki klejonej  $H = t_c + 2(t_f + t_b)$  (rys.1). Belka o długości  $L$  podparta przegubowo na obu końcach obciążona jest parą sił poprzecznych  $F_1$  oraz ściskającą siłą osiową  $F_0$ .



Rys.1. Schemat klejonej belki trójwarstwowej z obciążeniem

## 2. MODEL MATEMATYCZNY BELKI

Deformację płaskiego przekroju poprzecznego klejonej belki trójwarstwowej pokazano (linia czerwona) na rys. 2. Założono, że ugięcie  $w(x)$  jest takie samo dla każdej warstwy.



Rys.2. Schemat deformacji płaskiego przekroju trójwarstwowej belki klejonej

Przemieszczenia styczne dla kolejnych warstw, na podstawie tego rysunku, sformułowano następująco:

- okładziny górna  $-\left(\frac{1}{2} + x_1 + x_2\right) \leq \zeta \leq -\left(\frac{1}{2} + x_1\right)$ , dolna  $\frac{1}{2} + x_1 \leq \zeta \leq \frac{1}{2} + x_1 + x_2$ ,

$$u(x, \zeta) = -t_c \left[ \zeta \frac{dw}{dx} \pm \psi_1(x) \right], \quad (1)$$

- warstwy kleju górna  $-\left(\frac{1}{2} + x_1\right) \leq \zeta \leq -\frac{1}{2}$ , dolna  $\frac{1}{2} \leq \zeta \leq \frac{1}{2} + x_1$ ,

$$u(x, \zeta) = -t_c \left[ \zeta \frac{dw}{dx} \pm \psi_2(x) - \left( \zeta \pm \frac{1}{2} \right) \frac{\psi_1(x) - \psi_2(x)}{x_1} \right], \quad (2)$$

- rdzeń  $-\frac{1}{2} \leq \zeta \leq \frac{1}{2}$ ,

$$u(x, \zeta) = -t_c \zeta \left[ \frac{dw}{dx} - 2\psi_2(x) \right], \quad (3)$$

gdzie:

$$\zeta = \frac{z}{t_c} - \text{współrzędna bezwymiarowa}, \quad \psi_1(x) = \frac{u_1(x)}{t_c}, \quad \psi_2(x) = \frac{u_2(x)}{t_c} - \text{przemieszczenia}$$

bezwymiarowe,  $x_1 = \frac{t_b}{t_c}$ ,  $x_2 = \frac{t_f}{t_c}$  - parametry bezwymiarowe.

Warstwy belki są wykonane z materiałów sprężystych, zatem energia odkształcenia belki

$$U_\varepsilon = \frac{b}{2} \int_0^L \left[ \sum_{i=1}^5 \int_{t_i} (\varepsilon_x^{(i)} \sigma_x^{(i)} + \gamma_{xz}^{(i)} \tau_{xz}^{(i)}) dz \right] dx, \quad (4)$$

gdzie:

- odkształcenia kolejnych warstw ( $i = 1, 2, \dots, 5$ )

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}(x, \zeta)}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}(x, \zeta)}{\partial z} + \frac{dw(x)}{dx}, \quad (5)$$

- naprężenia kolejnych warstw ( $i = 1, 2, \dots, 5$ )

$$\sigma_x^{(i)} = E_i \varepsilon_x^{(i)}, \quad \tau_{xz}^{(i)} = G_i \gamma_{xz}^{(i)}, \quad (6)$$

$E_i$ ,  $G_i$  - moduły sprężystości materiałów kolejnych warstw ( $E_1 = E_5 = E_f$ ,  $E_2 = E_4 = E_b$ ,  $E_3 = E_c$ , analogicznie dla  $G_i$ ),  $b$  - szerokość belki.

Praca obciążenia

$$W = 2F_1 w_1 + \frac{1}{2} F_0 \int_0^L \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \quad (7)$$

gdzie  $w_1$  - ugięcie pod siłą  $F_1$ .

Układ trzech równań równowagi wyznaczony z zasady stacjonarności całkowitej energii potencjalnej ( $\delta(U_\varepsilon - W) = 0$ ) jest w następującej postaci

$$\alpha_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha_{12} \frac{d^3 \psi_1}{dx^3} - \alpha_{13} \frac{d^3 \psi_2}{dx^3} = -\frac{F_0}{bt_c^3} \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (8)$$

$$\alpha_{21} \frac{d^3 w}{dx^3} - \alpha_{22} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} - \alpha_{23} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \frac{2G_b}{x_1 t_c^2} [\psi_1(x) - \psi_2(x)] = 0, \quad (9)$$

$$\alpha_{31} \frac{d^3 w}{dx^3} - \alpha_{32} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} - \alpha_{33} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} - \frac{2G_b}{x_1 t_c^2} [\psi_1(x) - \psi_2(x)] + \frac{4G_c}{t_c^2} \psi_2(x) = 0, \quad (10)$$

gdzie:

$$\alpha_{11} = 2E_f C_{2f} + 2E_b C_{2b} + \frac{E_c}{12}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = E_f C_{1f} + \frac{E_b}{6} x_1 (3 + 4x_1), \quad \alpha_{22} = 2 \left( E_f x_2 + \frac{E_b}{3} x_1 \right),$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{E_c + E_b x_1 (3 + 2x_1)}{6}, \quad \alpha_{23} = \alpha_{32} = \frac{E_b}{3} x_1, \quad \alpha_{33} = \frac{E_c + 2E_b x_1}{3}, \quad C_{1f} = x_2 (1 + 2x_1 + x_2),$$

$$C_{2f} = x_2 \left[ x_1 (1 + x_1 + x_2) + \frac{1}{4} + \frac{x_2}{6} (3 + 2x_2) \right], \quad C_{1b} = x_1 (1 + x_1), \quad C_{2b} = \frac{x_1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{x_1}{3} (3 + 2x_1) \right].$$

Moment zginający

$$M_b(x) = b \sum_{i=1}^5 \int_{t_i} \sigma_x^{(i)} z dz = -bt_c^3 \left( \alpha_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} - \alpha_{12} \frac{d\psi_1}{dx} - \alpha_{13} \frac{d\psi_2}{dx} \right), \quad (11)$$

stąd

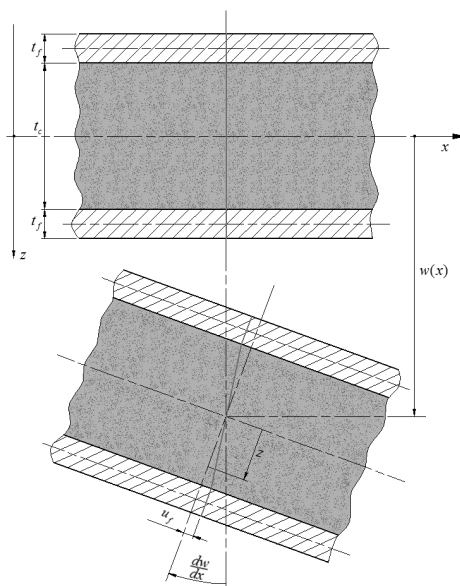
$$\alpha_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} - \alpha_{12} \frac{d\psi_1}{dx} - \alpha_{13} \frac{d\psi_2}{dx} = -\frac{M_b(x)}{bt_c^3}. \quad (12)$$

Siła poprzeczna

$$Q(x) = b \sum_{i=1}^5 \int_{t_i} \tau_{xz}^{(i)} dz = 2bt_c [G_b \psi_1(x) + (G_c - G_b) \psi_2(x)], \quad (13)$$

Równania (8) i (12) są równoważne, zatem do dalszych badań przyjmuje się układ składający się z trzech równań (12), (9) i (10).

Klasyczny model belki trójwarstwowej nie uwzględnia cienkiej warstwy kleju, jest więc szczególnym przypadkiem belki pięciowarstwowej (rys.3).



Rys.3. Schemat deformacji płaskiego przekroju klasycznej belki trójwarstwowej

Równania równowagi wyprowadzone analogicznie jak dla belki klejonej są postaci

$$\alpha_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} - \alpha_{12} \frac{d^3 \psi_0}{dx^3} = -\frac{F_0}{bt_c^3} \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (14)$$

$$\alpha_{21} \frac{d^3 w}{dx^3} - \alpha_{22} \frac{d^2 \psi_0}{dx^2} + \frac{4G_c}{t_c^2} \psi_0(x) = 0, \quad (15)$$

gdzie:  $\alpha_{11} = 2E_f C_{2f} + \frac{1}{12} E_c$ ,  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = E_f C_{1f} + \frac{1}{6} E_c$ ,  $\alpha_{22} = 2E_f x_2 + \frac{1}{3} E_c$ ,

$$C_{1f} = (1 + x_2)x_2, \quad C_{2f} = \frac{1}{12} (3 + 6x_2 + 4x_2^2)x_2, \quad x_2 = t_f/t_c, \quad \psi_0 = u_f/t_c.$$

Podobnie moment zginający i siła poprzeczna

$$M_b(x) = b \sum_{i=1}^3 \int \sigma_x^{(i)} z dz = -bt_c^3 \left( \alpha_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} - \alpha_{13} \frac{d\psi_0}{dx} \right), \quad (16)$$

stąd

$$\alpha_{11} \frac{d^2 w}{dx^2} - \alpha_{12} \frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{M_b(x)}{bt_c^3}, \quad (17)$$

oraz

$$Q(x) = b \sum_{i=1}^5 \int \tau_{xz}^{(i)} dz = 2bt_c G_c \psi_0(x), \quad (18)$$

Również w tym przypadku równania (14) i (17) są równoważne, zatem w dalszych badaniach będzie rozwiązywany układ dwóch równań (17) i (15).

### 3. ZGINANIE BELKI TRÓJWARSTWOWEJ POD OBCIĄŻENIEM POPRZECZNYM

Belka obciążona dwiema siłami poprzecznymi  $F_1$  (rys.1), w części środkowej jest w stanie czystego zginania, natomiast w częściach o długościach  $L_0$  występuje zginanie i ścinanie siłą poprzeczną. Moment zginający w lewej części belki  $M_b(x) = F_1 x$ , dla  $0 \leq x \leq L_0$ , natomiast w części środkowej  $M_b(x) = F_1 L_0$ , dla  $L_0 < x < L_0 + L_1$ . Układ dwóch równań (15) i (17), po prostych przekształceniach, sprowadza się do jednego z jedną nieznaną funkcją  $\psi_0(x)$  w postaci

$$\frac{d^2 \psi_0}{dx^2} - k^2 \psi_0(x) = -\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2} \frac{Q(x)}{bt_c^3}, \quad \text{gdzie } k = \frac{2}{t_c} \sqrt{\frac{\alpha_{11} G_c}{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2}}. \quad (19)$$

Całka tego równania

$$\psi_0(x) = C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(kx) + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \frac{Q(x)}{4G_c bt_c}. \quad (20)$$

Siła poprzeczna  $Q(x) = F_1$ , dla  $0 \leq x \leq L_0$ , natomiast w części środkowej  $Q(x) = 0$ . Zatem dla przedziału  $0 \leq x \leq L_0$ , uwzględniając warunki brzegowe  $\frac{d\psi_0}{dx} \Big|_0 = 0$  oraz  $\psi_0(L_0) = 0$ ,

wyznaczono stałe  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -\frac{1}{\cosh(kL_0)} \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \frac{F_1}{4G_c bt_c}$  i zapisano funkcję

$$\psi_0(x) = \left[ 1 - \frac{\cosh(kx)}{\cosh(kL_0)} \right] \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \frac{F_1}{4G_c b t_c}. \quad (21)$$

Natomiast dla części środkowej belki ( $L_0 < x < L_0 + L_1$ ) funkcja  $\psi_0(x) \equiv 0$ . Całkując równanie (17), po uwzględnieniu (21) i spełnieniu warunków ciągłości przemieszczeń dla  $x = L_0$ , wyznaczono ugięcie środka belki

$$w_{\max} = w\left(\frac{L}{2}\right) = \left(\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)^2 \left[ 1 - \frac{\tanh(kL_0)}{kL_0} \right] \frac{F_1 L_0}{4G_c b t_c} + \left[ \frac{3}{4} - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2 \right] \frac{F_1 L_0 L^2}{6\alpha_{11} b t_c^3}, \quad (22)$$

lub, po uwzględnieniu właściwości funkcji  $\tanh(kL_0) \approx 1$  dla  $2 < kL_0$ , zapisano

$$w_{\max} = \left(\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)^2 \left( 1 - \frac{1}{kL_0} \right) \frac{F_1 L_0}{4G_c b t_c} + \left[ \frac{3}{4} - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2 \right] \frac{F_1 L_0 L^2}{6\alpha_{11} b t_c^3}. \quad (23)$$

W szczególnym przypadku, gdy belka obciążona jest siłą skupioną  $F_2 = 2F_1$  w środku rozpiętości ( $L_0 = L/2$ ), ugięcie środka belki

$$w_{\max} = \left(\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\right)^2 \left( 1 - \frac{2}{kL} \right) \frac{F_2 L}{16G_c b t_c} + \frac{F_2 L^3}{48\alpha_{11} b t_c^3}. \quad (24)$$

Przykładowo, dla belki o długości  $L = 100 \text{ mm}$ , szerokości  $b = 50 \text{ mm}$ , grubości warstw  $t_f = 1 \text{ mm}$  i  $t_c = 18 \text{ mm}$ , stałych materiałowych  $E_f = 65600 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 1200 \text{ MPa}$ ,  $\nu_c = 0.3$ , obciążonej siłą  $F_2 = 1 \text{ kN}$  w środku rozpiętości, wyznaczono na podstawie (24) wartość ugięcia  $w_{\max}^{(Anal)} = 0.0864 \text{ mm}$ . Ponadto, dla porównania, wykonano obliczenia numeryczne MES (Abaqus) tej belki i otrzymano  $w_{\max}^{(MES)} = 0.0840 \text{ mm}$ . Różnica między tymi wartościami jest mniejsza od 3%. Okładziny modelowano elementami powłokowymi, natomiast rdzeń elementami bryłowymi.

Analogiczne rozwiązanie jest dla belki klejonej – pięciowarstwowej. Układ trzech równań (12), (9) i (10) sprowadza się do jednego, z którego wyznacza się funkcję  $\psi_2(x)$ , a następnie otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu niejednorodne.

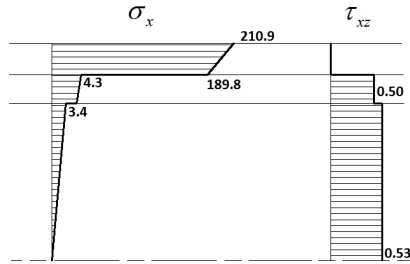
$$a_{11} \frac{d^4 \psi_1}{dx^4} - a_{12} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + a_{13} \psi_1(x) = \frac{Q(x)}{\alpha_{11} b t_c^3}. \quad (25)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}}{\alpha_{11} \alpha_{12}} \frac{\beta_{11}}{\beta_{02}} t_c^2, & a_{12} &= \frac{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{11} \alpha_{12}} + \frac{\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}}{\alpha_{11} \alpha_{12}} \frac{\beta_{11}}{\beta_{02}} + 2 \frac{\beta_{11}}{\beta_{02}} \frac{G_b}{\alpha_{12} x_1}, \\ a_{13} &= 2 \left( 1 + \frac{\beta_{01}}{\beta_{02}} \right) \frac{G_b}{\alpha_{12} x_1 t_c^2}, & \beta_{01} &= 2 \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}} \frac{G_b}{x_1}, & \beta_{11} &= \beta_{111} - \beta_{211}, \\ \beta_{111} &= \frac{\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}}, & \beta_{211} &= \frac{\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}}{\alpha_{11} \alpha_{33} - \alpha_{13}^2}, & \beta_{02} &= \beta_{102} - \beta_{212}, \\ \beta_{102} &= 2 \left( \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12} \alpha_{13} - \alpha_{11} \alpha_{23}} - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} \alpha_{33} - \alpha_{13}^2} \right) \frac{G_b}{x_1}, & \beta_{212} &= 4 \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11} \alpha_{33} - \alpha_{13}^2} G_c. \end{aligned}$$

Stąd po wyznaczeniu  $\psi_1(x)$  określa się  $\psi_2(x)$ . Znając obie funkcje  $\psi_1(x)$  i  $\psi_2(x)$  z równania (12), wyznacza się ugięcie belki. Postępowanie to jest obszerne i złożone. Rozwiązanie przybliżone układu trzech równań (12), (9) i (10) przedstawiono w pracy [18].

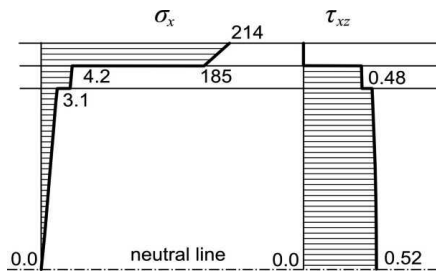
Rozkład naprężeń normalnych w przekroju środkowym i tnących w przekroju przy podporze belki klejonej pokazano na rys.4. Moduły sprężystości warstw kleju  $E_b = 1500 \text{ MPa}$ , rdzenia  $E_c = 1200 \text{ MPa}$ , okładzin  $E_f = 65600 \text{ MPa}$ , grubości warstw  $t_f = 1 \text{ mm}$  i  $t_c = 17.8 \text{ mm}$ ,  $t_b = 0.1 \text{ mm}$ . Pozostałe wymiary jak dla klasycznej belki trójwarstwowej.



Rys.4. Rozkłady naprężeń normalnych  $\sigma_x$  i tnących  $\tau_{xz}$  w przekrojach belki

Naprężenia tnące  $\tau_{xz}$  w warstwie kleju są nieco mniejsze niż w rdzeniu belki.

Opracowano model numeryczny MES (Abaqus) belki i wyznaczono, dla porównania z rozwiązaniem analitycznym, naprężenia w przekroju poprzecznym (rys.5).



Rys.5. Rozkłady naprężeń normalnych  $\sigma_x$  i tnących  $\tau_{xz}$  w przekrojach belki (MES)

#### 4. WYBOCZENIE SŁUPA TRÓJWARSTWOWEGO

Obciążenie krytyczne ściskanej belki-słupa (rys.1) wyznaczono, rozwiązując układ równań równowagi (12), (9) i (10) uwzględniając moment zginający  $M_b(x) = F_0 w(x)$ . Przyjęto trzy nieznanne funkcje w postaci [17]:

$$w(x) = w_a \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \psi_1(x) = \psi_{a1} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \psi_2(x) = \psi_{a2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad (25)$$

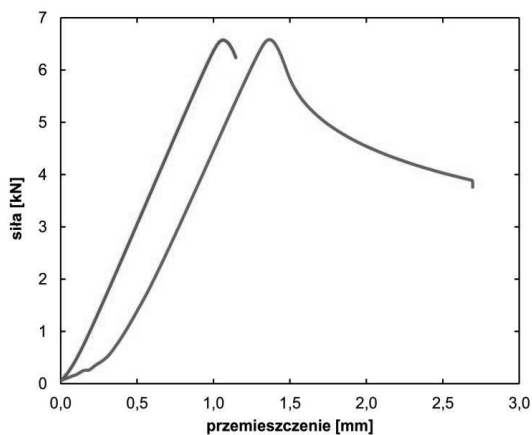
gdzie  $w_a, \psi_{a1}, \psi_{a2}$  - parametry.

Otrzymano układ trzech jednorodnych równań algebraicznych. Z warunku

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} - f_0 & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{gdzie } f_0 = \frac{F_0}{bt_c^3}, \quad (26)$$

wyznaczono obciążenie – osiową siłę krytyczną.

Przykładowo, dla belki-słupa o długości  $L = 900 \text{ mm}$ , szerokości  $b = 50 \text{ mm}$ , grubości warstw  $t_f = 1 \text{ mm}$  i  $t_c = 17.8 \text{ mm}$ ,  $t_b = 0.1 \text{ mm}$ , stałych materiałowych  $E_f = 65600 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 800 \text{ MPa}$ ,  $E_b = 1500 \text{ MPa}$ ,  $\nu_c = \nu_b = 0.3$ , ściskanego siłą  $F_0$  osiową, wyznaczono na podstawie (26) wartość obciążenia - siły krytycznej  $F_{0,CR}^{(Anal)} = 7.24 \text{ kN}$ . Ponadto, dla porównania, wykonano obliczenia numeryczne MES (Abaqus) i otrzymano  $F_{0,CR}^{(MES)} = 7.36 \text{ kN}$ . Różnica między tymi wartościami jest mniejsza od 2%. Badania doświadczalne ściskanych belek-słupów klejonych trójwarstwowych wykazały nieco niższe wartości obciążeń krytycznych  $F_{0,CR}^{(Exp)} = 6.58 \text{ kN}$  (rys.6). Należy zaznaczyć, że właściwości mechaniczne rdzenia z pianki metalowej są nieliniowe, natomiast modele analityczny i numeryczny MES uwzględniały liniową zależność naprężenie-odkształcenie.



Rys.5. Wyboczenie ściskanej osiowo belki-słupa trójwarstwowego – badania doświadczalne

## 5. ZAKOŃCZENIE

Konstrukcje warstwowe wytwarzane są z różnych materiałów. Sposób łączenia warstw może być przyczyną ich niszczenia przez rozwarstwienie. Przedmiotem badań jest klejona belka trójwarstwowa, której model uwzględnia ciekłą warstwę kleju. Badania teoretyczne wykazały pewną różnicę w wartościach naprężeń tnących w cieniłej warstwie kleju i rdzenia.



Naprężenia tnące w warstwie kleju są nieco niższe niż w rdzeniu, mimo że wartość modułu sprężystości kleju jest większa od wartości modułu rdzenia. Wpływ cienkiej warstwy kleju na ugięcie belki lub obciążenie krytyczne wyboczenia ogólnego jest nieznaczny, co wynika z rozwiązania modelu klasycznego i pięciowarstwowego belki.

## LITERATURA

1. Birman V.: Dynamic wrinkling in sandwich beams. "Composites": Part B 2004, Vol.35, p.665-672.
2. Carrera E.: An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. "Composite Structures" 2000, Vol.50, p.183-198.
3. Carrera E.: Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. "Applied Mechanics Reviews", ASME, 2003, Vol.56 (3), p.287-308.
4. Chakrabarti A., Chalak H.D., Mohd A.I., Abdul H.S.: A new FE model based on higher order zigzag theory for the analysis of laminated sandwich beam with soft core. "Composite Structures" 2011, Vol.93, p.271-279.
5. Fagerberg L., Zenkert D.: Imperfection-induced wrinkling material failure in sandwich panels. "Journal of Sandwich Structures and Materials" 2005, Vol.7, p.195-219.
6. Godzimirski J.: Wytrzymałość doraźna konstrukcyjnych połączeń klejowych. Warszawa: WNT, 2002.
7. Hadi B. K.: Wrinkling of sandwich column: comparison between finite element analysis and analytical solutions. "Composite Structures" 2001, Vol.53, p.477-482.
8. Jasion P., Magnucki K.: Wyboczenie-zmarszczenie okładziny belki trójwarstwowej przy czystym zginaniu. „Modelowanie Inżynierskie” 2011, nr 41, t. 10, s. 151 – 156.
9. Jasion P., Magnucka-Blandzi E., Szyc W., Wasilewicz P., Magnucki K.: Global and local buckling of a sandwich beam-rectangular plate with metal foam core. In: The 6<sup>th</sup> International Conference on Thin-Walled Structures. Timisoara, Romania 2011, p. 707-714.
10. Koissin V., Shipsha A., Skvortsov V.: Effect of physical nonlinearity on local buckling in sandwich beams. "Journal of Sandwich Structures and Materials" 2010, Vol.12, p.477-494.
11. Lopatin A.V., Morozov E.V.: Symmetrical facing wrinkling of composite sandwich panels. "Journal of Sandwich Structures and Materials" 2008, Vol.10, p.475-496.
12. Magnucka-Blandzi E., Magnucki K.: Effective design of a sandwich beam with a metal foam core. "Thin-Walled Structures" 2007, Vol.45(4), p.432-438.
13. Magnucka-Blandzi E.: Mathematical modelling of shear effect of sandwich beam. In: Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics", T.E. Simons et al (Eds.), 2010, p.2081-2084.
14. Magnucka-Blandzi E.: Stateczność belek i płyt trójwarstwowych oraz belek cienkościennych kształtowanych na zimno. Rozprawy nr 449. Poznań: Wyd. Pol. Pozn., 2010.
15. Magnucki K., Ostwald M. (red.): Stateczność i optymalizacja konstrukcji trójwarstwowych. Poznań, Zielona Góra: Wyd. Inst. Technologii Eksploatacji w Radomiu, 2001.
16. Magnucki K., Jasion P., Magnucka-Blandzi E., Paczos P.: Local elastic buckling of thin-walled channel beams and sandwich beams. In: The Sixth M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics – Focus: Advances in Solids & Structures. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, 2011.

17. Magnucki K., Jasion P., Szyc W., Smyczyński M.: Strength and buckling of a sandwich beam with thin binding layers between faces and a metal foam core. In: The 2011 World Congress on Advances in Structural Engineering and Mechanics, ASEM'11, Seoul, Korea, 2011, p.826-835.
18. Magnucki K., Jasion P., Smyczyński M.: Modelowanie belek trójwarstwowych. W: II Kongres Mechaniki Polskiej. Poznań 2011.
19. Magnucki K.: Wytrzymałość i stateczność belek trójwarstwowych. W: XII konf. nauk.-tech. „Techniki Komputerowe w Inżynierii”. Słok k. Bełchatowa, 2011, p.25-26.
20. Meyer-Piening H.R.: Sandwich plates: stresses, deflection, buckling and wrinkling loads – a case study. “Journal of Sandwich Structures and Materials” 2006, Vol.8, p.381-394.
21. Michalak B.: Płyty kompozytowe.(pod red. C. Woźniaka) W: Mechanika Techniczna, Mechanika sprężystych płyt i powłok. T.VIII. Warszawa: Wyd. Nauk. PWN, 2001, s.542-568.
22. Paczos P., Zielnica J., Wasilewicz P.: Limit load of a rectangular plate with metal foam core with application to sandwich beam. In: The 6<sup>th</sup> Intl Conference on Thin-Walled Structures. Timisoara, Romania 2011, p. 747-754.
23. Romanów F.: Wytrzymałość konstrukcji warstwowych : statyka, stateczność, drgania, badania doświadczalne. Zielona Góra: Wyd. WSI, 1995.
24. Szyc W., Laszczyk Z., Magnucki K.: Elastic buckling compressed sandwich cylindrical panel with three edges simply supported and one edge free. “Thin-Walled Structures” 2006, Vol.44, p.910-918.
25. Vinson J.R.: Sandwich structures. “Applied Mechanics Reviews”, ASME, 2001, Vol.54 (3), p.201-214.
26. Woźniak M.: Interakcja płyty z podłożem sprężystym. (pod red. C. Woźniaka) *Mechanika Techniczna, Mechanika sprężystych płyt i powłok*. T.VIII, Warszawa: Wyd. Nauk. PWN, 2001, s.500-541.

## STRENGTH AND BUCKLING OF SANDWICH BEAMS-COLUMNS

Summary. The subject of the paper are sandwich beams loaded in four-point bending or axially compressed. Two models of the beams are presented. The equation of equilibrium is obtained based on the principle of stationary total potential energy. The analytical solution of this equation is composed of hyperbolic functions. Numerical calculations are realized for a family of sandwich beams with different mechanical properties of the core. Moreover, FEM investigations are realized. Results of both methods for global buckling are compared with experimental tests.

*Praca finansowana przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego – Grant nr 0807/B/T02/2010/38 oraz DS 21-364/2011.*