

## MODELOWANIE PRZEBIEGÓW PRZEJŚCIOWYCH W PRZEWODACH Z UWZGLĘDNIENIEM KAWITACJI

ZBIGNIEW ZARZYCKI  
KAMIL URBANOWICZ

*Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Szczecińska*

Streszczenie. W pracy przedstawiono dwa kluczowe modele matematyczne przebiegów przejściowych przepływu kawitacyjnego w przewodach: model rozerwania słupa cieczy (column separation model - CSM) i model kawitacji pęcherzykowej (bubbly cavitation model - BCM). Uwzględniono w nich niestabilne modele tarcia cieczy o ścianki przewodu. Rezultaty symulacji numerycznych porównano z wynikami badań eksperymentalnych. Przebiegi, w których uwzględniono niestacjonarne opory tarcia cieczy o ścianki rurociągu, dobrze odpowiadają wynikom eksperymentalnym.

### 1. WSTĘP

Podczas zjawiska uderzenia hydraulicznego, spowodowanego np. skokowym odcięciem przepływu, czy też awaryjnym wyłączeniem silnika elektrycznego napędzającego pompę hydrauliczną, może wystąpić zjawisko kawitacji w przewodach układów hydraulicznych. Z matematycznego punktu widzenia mogą być dwa rodzaje modeli kawitacji: kawitacja dyskretna, powodująca rozerwanie strumienia cieczy (column separation model CSM) i kawitacja pęcherzykowa (bubbly cavitation model BCM), rozłożona wzdłuż osi przewodów. Falowy charakter zmian ciśnienia podczas uderzenia hydraulicznego może być przyczyną jej cyklicznego powstawania i zanikania. Z technicznego punktu widzenia ważne jest przewidywanie maksymalnych pulsacji ciśnienia.

Praca niniejsza dotyczy prognozowania zmian ciśnienia podczas przebiegów przejściowych przepływu z uwzględnieniem kawitacji. Większość softwarowych programów obliczeniowych wykorzystywanych do symulacji przebiegów przejściowych z kawitacją korzysta z prostych algorytmów obliczeniowych, w których przyjmuje się quasi – ustalone opory hydrauliczne. Można tu wymienić model Streetera [1] dla przypadku rozerwania strumienia cieczy (CSM), czy też prace poświęcone kawitacji pęcherzykowej, np. Chaundhry et al. [2], gdzie przyjmowane są quasi – ustalone straty hydrauliczne lub Fujii et al. [3], gdzie pomija się opory hydrauliczne. Nowością tej pracy jest uwzględnienie w obu wspomnianych modelach zmiennych w czasie oporów hydraulicznych, zarówno dla przepływu laminarnego, jak i turbulentnego.

Zmienne opory hydrauliczne zostały przedstawione w postaci całki splotowej z przyspieszenia cieczy i pewnej funkcji wagowej dla naprężenia stycznego na ścianie przewodu. Przedstawiono wyniki symulacji komputerowej przebiegów zmian ciśnienia podczas uderzenia

hydraulicznego z kawitacją z uwzględnieniem zmiennych i quasi – ustalonych oporów hydraulicznych. Porównano je z wynikami badań eksperymentalnych Berganta i Simpsona [4-6]. Porównanie to pokazuje, że wyniki obliczeniowe przebiegów zmian ciśnienia z uwzględnieniem zmiennych oporów są bliższe wynikom eksperymentalnym niż w przypadku oporów quasi – ustalonych.

## 2. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Rozpatrywane są dwa modele kawitacji:

- model rozerwania słupa cieczy (CSM) [6-10]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_1 \cdot c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_1 \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_1 \cdot g \cdot \sin \gamma + \frac{2}{R} \cdot \tau_w = 0 \quad (2)$$

- model kawitacji pęcherzykowej (BCM) [10]:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + (\rho_1 - \rho_v) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \rho_m \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{\alpha} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\rho_m \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v}{\alpha} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{R} \cdot \tau_w \left( \frac{v}{\alpha}, \alpha \right) + \rho_m \cdot g \cdot \sin \gamma = 0 \quad (4)$$

gdzie:

$$\rho_m = \alpha \cdot \rho_1 + (1 - \alpha) \cdot \rho_v \quad (5)$$

Równania (1) i (3) wynikają z warunku ciągłości, natomiast (2) i (4) przedstawiają równania ruchu. Zależność (5) przedstawia gęstość mieszaniny cieczy i pary w funkcji współczynnika stężenia  $\alpha$ .

## 3. MODELE TARCIA

Modelem tarcia cieczy o ścianki przewodu, który jest powszechnie używany w obliczeniach stanów przejściowych z uwzględnieniem kawitacji, jest model quasi-ustalonych strat tarcia:

- w modelu rozerwania słupa cieczy (CSM):

$$\tau_w = \tau_{wq} = \frac{1}{8} \rho_1 \cdot \lambda \cdot v \cdot |v| \quad (6.1)$$

- w modelu kawitacji pęcherzykowej (BCM):

$$\tau_w = \tau_{wq} = \frac{\left( \frac{1}{8} \rho_m \cdot \lambda \cdot v \cdot |v| \right)}{\alpha^2} \quad (6.2)$$

Ostatnie badania dotyczące niestacjonarnych strat tarcia umożliwiają przedstawienie naprężenia stycznego na ściance przewodu w postaci dwóch składników [11-16] quasi-ustalonego  $\tau_{wq}$  oraz odchyłki od niego  $\tau_{wn}$  wynikającej z niestacjonarności przepływu. Ten drugi składnik może być przedstawiony w postaci całki splotowej z przyśpieszenia cieczy i pewnej funkcji wagi  $w(t)$ . Różne postaci funkcji wagi można spotkać w pracach [13,15,16] dla przepływu laminarnego oraz w pracach [11,12,14] dla przepływu turbulentnego. Tak więc można zapisać [15]:

$$\tau_w = \tau_{wq} + \frac{2\mu}{R} \int_0^t w(t-u) \frac{\partial v}{\partial t}(u) du \quad (6.3)$$

W tej pracy użyto, następujące modele funkcji wagi:

- dla przepływu laminarnego:

a) model Zarzyckiego [11,12]:

$$w(\hat{t}) = C_1 \hat{t}^{-0.5} + C_2 e^{-m\hat{t}} \quad (7)$$

gdzie:  $C_1 = 0.2812$ ,  $C_2 = -1.5821$ ,  $m = 8.8553$ .

b) model Schohla [13]:

$$w(\hat{t}) = \sum_{i=1}^5 m_i e^{-n_i \hat{t}} \quad (8)$$

gdzie:  $m_1 = 1.051$ ,  $m_2 = 2.358$ ,  $m_3 = 9.021$ ,  $m_4 = 29.47$ ,  $m_5 = 79.55$ ;  $n_1 = 26.65$ ,  $n_2 = 100$ ,  $n_3 = 669.6$ ,  $n_4 = 6497$ ,  $n_5 = 57990$ .

- dla przepływu turbulentnego model Kudźmy [11,14]:

$$w(\hat{t}) = (c_1 \text{Re}^{c_2} + c_3) \cdot \sum_{i=1}^8 A_i \cdot e^{-b_i \hat{t}} \quad (9)$$

$c_1 = -13.27813$ ,  $c_2 = 0.000391$ ,  $c_3 = 14.27658$ ;  $A_1 = 1.568$ ,  $A_2 = 60.73$ ,  $A_3 = 10.76$ ,  $A_4 = 33.26$ ,  $A_5 = 2.799$ ,  $A_6 = 5.527$ ,  $A_7 = 0.2137$ ,  $A_8 = 18.99$ ;  $b_1 = 8.44$ ,  $b_2 = 96940$ ,  $b_3 = 2162$ ,  $b_4 = 29250$ ,  $b_5 = 88.02$ ,  $b_6 = 480.5$ ,  $b_7 = 0.09834$ ,  $b_8 = 8425$ .

#### 4. PROCEDURA OBLICZENIOWA

Równania (1), (2) i (3), (4) można sprowadzić do pary równań różniczkowych zwyczajnych, wykorzystując w tym celu metodę charakterystyk (method of characteristics – MOC). Dla CSM mamy:

$$\pm dp + \rho_1 \cdot c \cdot dv + \frac{2 \cdot \tau_w \cdot c}{R} \cdot dt + \rho_1 \cdot c \cdot g \cdot dt \cdot \sin \gamma = 0 \quad (10)$$

$$\text{jeśli:} \quad dx = \pm c \cdot dt \quad (11)$$

oraz w przypadku modelu kawitacji pęcherzykowej:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v}{\alpha} \right) \pm \frac{1}{\rho_1 \cdot c} \cdot \frac{d}{dt} (p - p_v) \pm c \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( \ln \frac{\rho_m}{\rho_l} \right) + g \cdot \sin \gamma + \frac{2 \cdot \tau_w}{R \cdot \rho_m} = 0 \quad (12)$$

$$\text{jeśli:} \quad dx = \pm c \cdot dt \quad (13)$$

W przypadku modelu Zarzyckiego (7) napężenie  $\tau_w$  obliczono wg tradycyjnej metody Zielke [15], zastępując całkę splotowa skończoną sumą:

$$\tau_w(k,i) = \tau_{wq}(k,i) + \tau_{wn}(k,i) \quad (14)$$

$\tau_{wq}(k,i)$  liczone jest w modelu CSM z wzoru (6.1), a dla BCM z (6.2).

$$\tau_{wn}(k,i) = \frac{2\mu}{R} [(v_{k,i} - v_{k-1,i})W_{1,i} + (v_{k-1,i} - v_{k-2,i})W_{2,i} + \dots + (v_{2,i} - v_{1,i})W_{k-1,i}] \quad (15)$$

W przypadku modelu Schohla (8) napężenie  $\tau_w$  obliczono w następujący sposób:

$$\tau_{wn} = \frac{2 \cdot \mu}{R} \cdot \sum_{i=1}^5 y_i \quad (16)$$

gdzie:

$$y_i(t + \Delta t) = y_i(t) \cdot e^{-n_i \left( \frac{v}{R^2} \right) \Delta t} + m_i \cdot e^{-n_i \left( \frac{v}{R^2} \right) \frac{\Delta t}{2}} \cdot [v(t + \Delta t) - v(t)] \quad (16.1)$$

Jest to model który powstał na bazie efektywnego modelu Trikhy [16].

Dla modelu efektywnego Kudźmy (9) [14]:

$$\tau_{wn}(t+\Delta t) = \frac{2\mu}{R} \cdot \sum_{i=1}^8 y_i(t) \cdot A_i \cdot e^{-b_i \cdot \frac{v}{R^2} \cdot \Delta t} + \left( c_1 Re^{c_2} + c_3 \right) \cdot \frac{A_i \cdot R^2}{\Delta t \cdot b_i \cdot v} \cdot \left[ 1 - e^{-b_i \cdot \frac{v}{R^2} \cdot \Delta t} \right] \cdot [v(t+\Delta t) - v(t)] \quad (17)$$

Rozwiązanie układu równań (1), (2) opisującego rozerwanie słupa cieczy, jest dobrze znane [8-10]. Warto jednak nadmienić, że w wykorzystanym do symulacji modelu założono możliwość tworzenia się obszaru nieciągłości tylko w jednym z zadanych przekroju obliczeniowym [7,9,17]. Objętość strefy kawitacji w rurociągach o stałej średnicy wewnętrznej oblicza się wykorzystując warunek ciągłości w postaci:

$$V_c = A \cdot \int_{t_0}^t (v^+ - v^-) \cdot dt \quad (18)$$

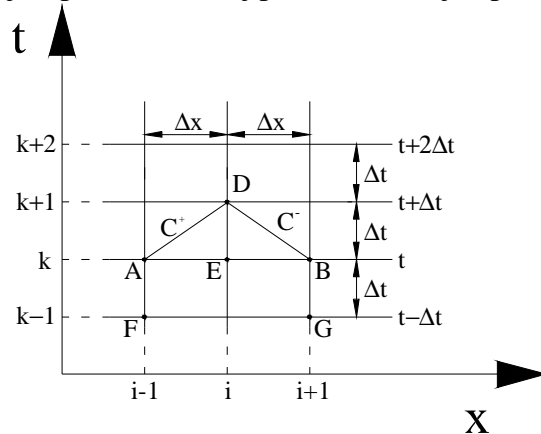
gdzie:

$t_0$  – czas pojawienia się kawitacji (określony chwilą, kiedy ciśnienie  $p$  przekroczy wartość  $p_v$ ),  
 $v^+$  i  $v^-$  – prędkość przepływu cieczy, odpowiednio z prawej i lewej strony obszaru kawitacji,

Wartość objętości  $V_c$  najpierw wzrasta, co świadczy o rozwoju kawitacji, a następnie maleje, gdy kawitacja zanika. Osiągnięcie wartości  $V_c=0$  oznacza zniknięcie obszaru kawitacji i tym samym powrót do ciągłego przepływu cieczy. Powyższy warunek ciągłości (18) w postaci różnicowej przedstawia się następująco:

$$V_{c_{k+1}} = V_{c_k} + 0.5 \cdot A \cdot (v_{k+1}^+ + v_k^+ - v_{k+1}^- - v_k^-) \cdot \Delta t \quad (19)$$

Wykorzystując metodę charakterystyk dla układu równań modelu kawitacji pęcherzykowej (3), (4), a następnie metodę różnic skończonych, otrzymamy, po uporządkowaniu, wzory służące do wyznaczania parametrów przepływu pęcherzykowego  $p_D$ ,  $v_D$  oraz  $\alpha_D$ . Wykorzystana procedura jest podobna do tej przedstawionej w pracy J.J. Shu [10].



Rys. 1. Siatka charakterystyk

- Gdy występuje przepływ ciągły (brak kawitacji) wówczas  $\alpha_D = 1$  oraz:

$$p_D = \frac{\rho_l \cdot c}{2} \cdot \left[ \left( \frac{v_A}{\alpha_A} - \frac{v_B}{\alpha_B} \right) + \frac{1}{\rho_l \cdot c} (p_A + p_B) + \frac{c}{2} \left( \ln \frac{\rho_{mE} \cdot \rho_{mF}}{\rho_l \cdot \rho_{mA}} + \ln \frac{\rho_{mE} \cdot \rho_{mG}}{\rho_l \cdot \rho_{mB}} \right) + \frac{2 \cdot \Delta t}{R} \left( \frac{\tau_{wB}}{\rho_{mB}} - \frac{\tau_{wA}}{\rho_{mA}} \right) \right] \quad (24)$$

- Gdy występuje przepływ nieciągły (z kawitacją) wtedy zakłada się  $p_D = p_v$  oraz wyznacza się współczynnik stężenia fazy ciekłej z wzoru:

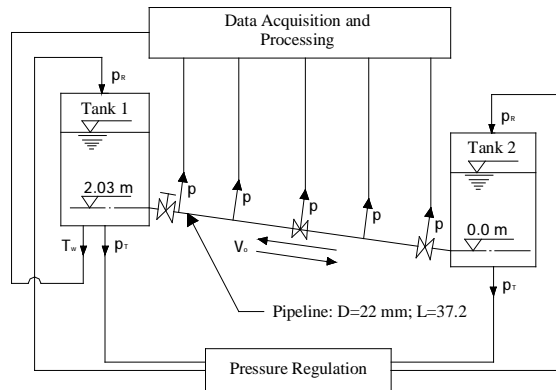
$$\alpha_D = \frac{\rho_l \cdot \exp \left( \frac{1}{c} \cdot \left[ \left( \frac{v_A}{\alpha_A} - \frac{v_B}{\alpha_B} \right) + \frac{1}{\rho_l \cdot c} (p_A + p_B) + \frac{c}{2} \left( \ln \frac{\rho_{mE} \cdot \rho_{mF}}{\rho_l \cdot \rho_{mA}} + \ln \frac{\rho_{mE} \cdot \rho_{mG}}{\rho_l \cdot \rho_{mB}} \right) + \frac{2 \cdot \Delta t}{R} \left( \frac{\tau_{wB}}{\rho_{mB}} - \frac{\tau_{wA}}{\rho_{mA}} \right) \right] \right)}{\rho_l - \rho_v} \quad (26)$$

- W obydwu przypadkach prędkość liczona jest z wzoru:

$$v_D = \frac{\alpha_D}{2} \cdot \left[ \left( \frac{v_A}{\alpha_A} + \frac{v_B}{\alpha_B} \right) + \frac{1}{\rho_l \cdot c} (p_A - p_B) + \frac{c}{2} \left( \ln \frac{\rho_{mE} \cdot \rho_{mF}}{\rho_l \cdot \rho_{mA}} - \ln \frac{\rho_{mE} \cdot \rho_{mG}}{\rho_l \cdot \rho_{mB}} \right) - \frac{2 \cdot \Delta t}{R} \left( \frac{\tau_{wB}}{\rho_{mB}} + \frac{\tau_{wA}}{\rho_{mA}} \right) - 2 \Delta t \cdot g \cdot \sin \gamma \right] \quad (27)$$

### 5. WYNIKI SYMULACJI

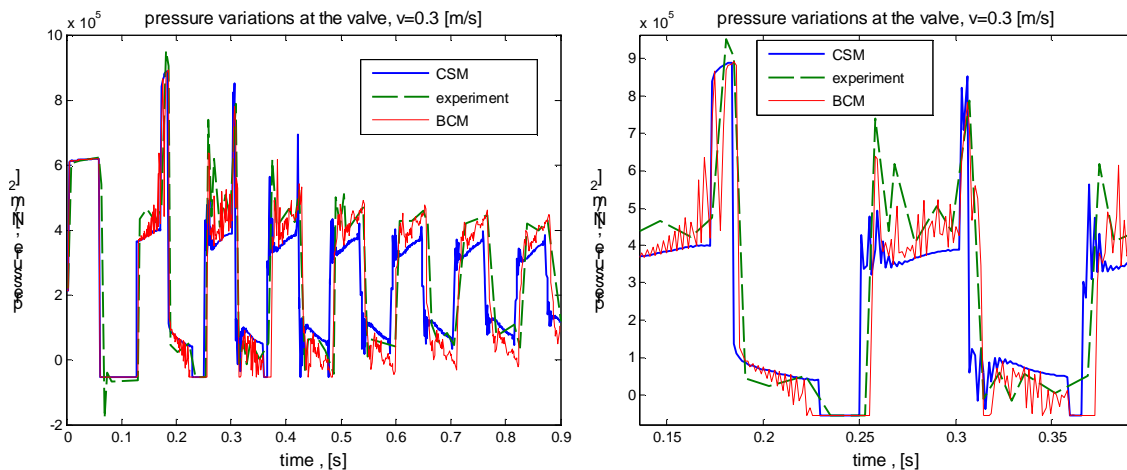
W celu weryfikacji zaprezentowanych modeli porównano wyniki symulacji z wybranymi wynikami doświadczalnymi [4-6]. Eksperyment prowadzony był na stanowisku badawczym zbudowanym z 37.2 metrowego odcinka rurociągu miedzianego o średnicy wewnętrznej 22 milimetra i grubości ścianki 1.63 milimetra, łączącego dwa zbiorniki ciśnieniowe (rys. 2).



Rys. 2. Stanowisko badawcze

We wszystkich przebiegach pewne parametry były jednakowe: czas zamknięcia szybko zamykającego się zaworu kulowego  $T_f=0,009$  [s]; prędkość propagacji fali ciśnienia  $c=1319$  [m/s]; temperatura wody  $T_w=15,5$  [°C]. Gęstość i lepkość wody zostały wyznaczone z charakterystyk przy znanej temperaturze. Poniżej przedstawione zostaną wybrane przebiegi niestabilne.

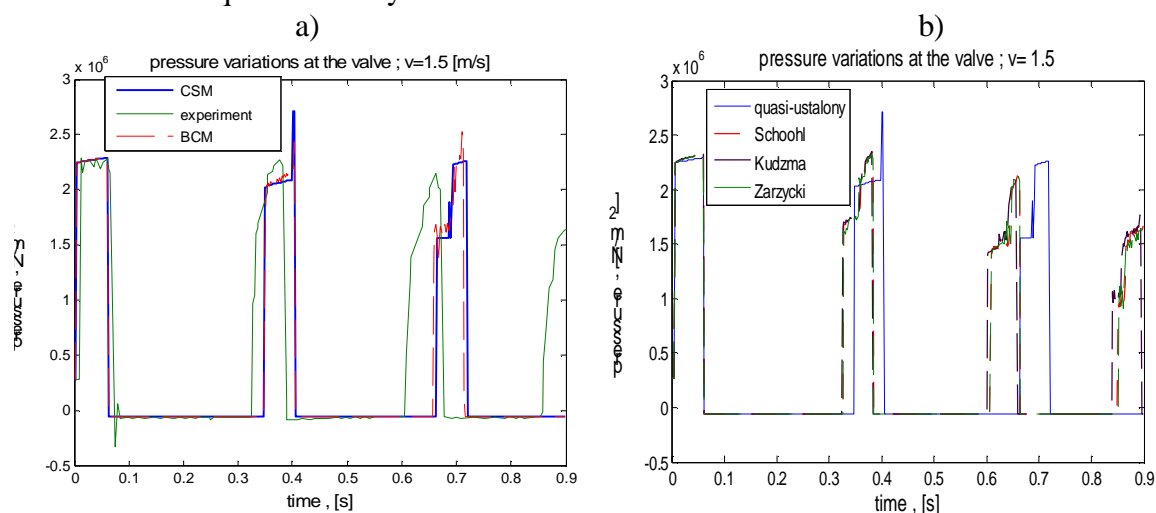
A) prędkość w ruchu ustalonym  $v_o=0,3$  [m/s]; ciśnienie przy zbiorniku  $p_{zb}=0,2158$  [MPa]; model niestacjonarnych strat tarcia dla przepływu laminarnego - efektywny Schöhl.



Rys. 3. Przebieg A – zmian ciśnienia przy zaworze ( $v_o=0.30$  m/s,  $p_{zb}=0.2158$  MPa)

Od czwartego wierzchołka przebiegu ciśnienia przy zaworze (rys. 3) widać przewagę modelu BCM nad CSM. Wyniki symulacji z użyciem CSM charakteryzują się, bowiem zanizonymi wartościami ciśnienia wierzchołków przebiegu. Ponadto wyniki symulacji modelem BCM charakteryzują się lepszym dopasowaniem okresów przebiegu.

B) prędkość w ruchu ustalonym  $v_o=1,5$  [m/s]; ciśnienie przy zbiorniku  $p_{zb}=0,3139$  [MPa]; model strat tarcia quasi - liniowy.



Rys. 4. a) Przebieg B – zmian ciśnienia przy zaworze ( $v_o=1.50$  m/s,  $p_{zb}=0.3139$  MPa)  
b) wyniki symulacji dla modeli z niestacjonarnym tarcie

Powyższej (rys. 4 a)) widać różnice pomiędzy wynikami symulacji z wykorzystaniem prostego (powszechnie stosowanego) quasi - ustalonego tarcia, a wynikami eksperymentalnymi. Dla tego samego przebiegu (rys. 4 b)) dodatkowo zaprezentowany jest wykres symulacji wykonanych modelem CSM w, którym uwzględniono niestacjonarność tarcia. Widać na nim pozytywny wpływ modeli niestacjonarnego tarcia na przewidywane zmiany ciśnienia.

## 6. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono dwa modele kawitacji przejściowej. Powszechnie stosowany w praktyce model rozerwania słupa cieczy (column separation model CSM) oraz nowy tzw. model pęcherzykowy (BCM). Z przeprowadzonych eksperymentów przez Berganta i Simsona widać wyraźnie, iż dla małych liczb Reynoldsa przebiegi ciśnienia ujawniają znacznie więcej oscylacji. Jest to spowodowane najprawdopodobniej występującą kawitacją w postaci pęcherzyków. I w tych przypadkach symulacja numeryczna uwzględniająca modele kawitacji pęcherzykowej (BCM) jest nieco dokładniejsza od symulacji z uwzględnieniem rozerwania słupa cieczy. Natomiast w przypadku przepływów z dużą liczbą Reynoldsa, gdzie dochodziło najprawdopodobniej do rozerwania słupa cieczy, eksperymentalne przebiegi ciśnienia nie wykazują dodatkowych oscylacji, co ma związek z utrzymywaniem się obszaru nieciągłości przez zdecydowanie dłuższy czas. W tych przypadkach trudno określić, który model kawitacji w symulowanych przebiegach lepiej odzwierciedla rzeczywistość.

Spośród przeprowadzonych porównań zauważono w sposób jednoznaczny, iż zastosowanie modeli niestacjonarnego tarcia cieczy w istotny sposób zbliża symulacje komputerową do

danych eksperymentalnych. Symulacje uwzględniające tylko quasi-ustalone tarcie niedokładnie odzwierciedlają okres przebiegu jak i szacowane wartości wierzchołków przebiegów ciśnienia.

W przeprowadzonych obliczeniach dobór modeli niestacjonarnej tarcia w zależności od charakteru przepływu (laminarny - turbulentny) determinowany był jedynie krytyczną liczbą  $Re_c=2320$ . Dla przepływów przejściowych z występującą kawitacją, takich jak uderzenie hydrauliczne, brak jest wyraźnie zarysowanych kryteriów określających charakter przepływu. W literaturze funkcjonuje jedynie zależność opracowana przez Ohmi [18]. Jednak, jak pokazano w [19], zależność ta ma stosunkowo wąskie zastosowanie, co najważniejsze nie uwzględnia ona możliwości wystąpienia kawitacji.

Zdaniem autorów, dalsze prace w tym zakresie powinny dotyczyć dokładniejszych badań eksperymentalnych dla szerokiego zakresu liczb Reynoldsa oraz dodatkowych badań umożliwiających określenie kryteriów do prognozowania warunków przepływu turbulentnego.

## LITERATURA

1. Streeter, V. L. 1969, "Water hammer analysis", *ASCE, Journal of Hydraulic Division*, 95(6), p. 1959-1972.
2. Chaudhry, M. H., Bhallamudi S. M., Martin C. S., and Naghash M., 1990, "Analysis of transient pressure in bubbly, homogeneous, gas-liquid mixtures", *Journal of Fluids Engineering*, June, Vol. 112, p. 225-231.
3. Fujii T., and Akagawa K., 1986, "Analysis of water hammering in bubbly flows", *JSME*, vol. 29, no. 265, p. 1746-1751.
4. Bergant A., and Simpson A. R., 1996, "Interesting lessons from column separation experiments", *Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Pressure Surges and Fluid Transients in Pipelines and Open Channels*, Publication 19, BHR Group, p. 83-97.
5. Bergant A., and Simpson A. R., 1994, "Estimating unsteady friction in transient cavitating pipe flow", *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Water Pipeline Systems, BHRA Group Conf. Series Publ.*, No. 110, UK, 24-26 May, Edinburgh, p. 3-16.
6. Bergant A., and Simpson A. R., 1999, "Pipeline column separation flow regimes", *Journal of Hydraulic Engineering*, August 1999, p. 835-848.
7. Simpson A. R., and Bergant A., 1994, "Numerical comparison of pipe-column-separation models", *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 120, no. 3, march, p. 361-377.
8. Wylie E.B., and Streeter L.V., 1978, "*Fluid Transients*", McGraw-Hill, New York.
9. Safwat H. H., and Polder Jaap van Den, 1973, "Experimental and analytic data correlation study of water column separation", *Journal of Fluids Engineering*, march 1973, p. 91-97.
10. Shu J. J., 2003, "Modelling vaporous cavitation on fluid transients", *Intern. Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 80, p. 187-195.
11. Zarzycki Z., and Kudźma S., 2004, "Simulations of transient turbulent flow in liquid lines using time – dependent frictional losses", *Proceedings of the 9th International Conference on Pressure Surges, BHR Group*, Chester, UK, 24–26 March, p. 439–455.
12. Zarzycki Z., 2000, "On Weighting Function for Wall Shear Stress During Unsteady Turbulent Flow", *Proc. of 8<sup>th</sup> International Conference on Pressure Sergues, BHR Group Conference Series*, No 39, 12-14 April, The Hague, The Netherlands, p. 529-534.
13. Schohl G. A., 1993, "Improved Approximate Method for Simulating Frequency – Dependent Friction in Transient Laminar Flow", *Journ.of Fluids Eng., Trans. ASME*, Vol. 115, September 1993, p. 420–424.

14. Kudźma S., 2005, "Modeling and simulation dynamical runs in closed conduits of hydraulics systems using unsteady friction model", *PhD work at Szczecin University of Technology*, February, In Polish.
15. Zielke W., 1968, "Frequency-Dependent Friction in Transient Pipe Flow", *Journ. of ASME*, 90, March 1968, p. 109-115.
16. Trikha A. K., 1975, "An Efficient Method for Simulating Frequency-Dependent Friction in Transient Liquid Flow", *Journ. of Fluids Eng., Trans. ASME*, March 1975, p. 97-105.
17. Adamkowski A., 1996, "Theoretical and experimental investigation of waterhammer attenuation by cut-off and bypass valves in pipeline systems of hydraulic turbomachines" In Polish. WIMP PAN, Gdańsk.
18. Ohmi M., Kyomen S., and Usui T., 1985 "Numerical Analysis of Transient Flow in a Liquid line", *Bulletin of JSME*, Vol. 28. No 239, May 1985, p. 799-806.
19. Carpinlioglu M. O., and Gundogdu M. Y., 2001, "A critical review on pulsatile pipe flow studies directing towards future research topics", *Flow Measurement and Instrumentation* 12, p. 163-174.

## MODELING TRANSIENT PIPE FLOW WITH CAVITATION

**Summary.** The paper presents two crucial mathematical models of transient cavitating pipe flow, i.e. column separation model (CSM) and bubbly cavitation model (BCM). The transient state models of friction between liquid and pipe wall have been associated with those models. The results of numeric simulations have been compared to results of experiments. Putting the dependences representing the non-stationary resistances of friction between liquid and pipe walls to considered models one can observe, that simulation results are quite similar to referring experimental results.

### OZNACZENIA

$c$	- prędkość propagacji fali ciśnienia [m/s],
$g$	- przyspieszenie ziemskie [m/s <sup>2</sup> ],
$p$	- ciśnienie [Pa],
$p_v$	- ciśnienie prężności pary nasyconej [Pa],
$t$	- czas [s],
$\hat{t} = vt / R^2$	- czas bezwymiarowy [-],
$v$	- średnia prędkość przepływu [m/s],
$w$	- funkcja wagi [-],
$x$	- położenie przekroju poprzecznego [m],
$L$	- długość rurociągu [m],
$R$	- promień rurociągu [m],
$Re = 2Rv/\nu$	- liczba Reynoldsa [-],
$\alpha$	- współczynnik stężenia fazy ciekłej [-],
$\gamma$	- kąt pochylenia rurociągu [°],
$\lambda$	- współczynnik strat tarcia [-],
$\mu$	- lepkość dynamiczna [kg/ms],
$\nu$	- lepkość kinematyczna [m <sup>2</sup> /s],
$\rho$	- gęstość [kg/m <sup>3</sup> ],
$\tau_w$	- naprężenie styczne na ścianie rurociągu [N/m <sup>2</sup> ],

$v$	- para,
$m$	- jednorodna mieszanina cieczy i jej pary,
$wq$	- stacjonarny przepływ,
$wn$	- niestacjonarny przepływ,

### SYMBOLE

CSM	- model rozerwania słupa cieczy column separation model
BCM	- model kawitacji pęcherzykowej bubble cavitation model
qst	- quasi-ustalone straty tarcia quasi-steady friction losses

### INDEKSY DOLNE I GÓRNE

$l$	- ciecz,
-----	----------